

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 maggio 1915.

O. TOMMASINI, Socio anziano (Presidente).

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla classificazione delle curve algebriche e sul teorema d'esistenza di Riemann.* Nota II del Corrispondente FRANCESCO SEVERI.

5. PUNTI DOPPI PROPRI ED IMPROPRI RISPETTO ALLE CURVE DI UNA DATA FAMIGLIA. — Sia V una famiglia di curve C_p^n nello S_r ($r > 2$). Si dice che una curva C della famiglia, ha acquistato un (nuovo) *punto doppio proprio* P , quando l'acquisto di tal punto singolare trae seco l'abbassamento di un'unità nel genere effettivo p di C ; il nuovo punto doppio P dicesi invece *improprio*, quando la C , che lo ha acquistato, ha ancora il genere p .

Se la particolare curva C appartiene ad un'altra famiglia W , rispetto a questa il punto doppio acquistato da C può esser di specie diversa, che non rispetto a V . Un esempio espressivo in proposito, vien dato dalle quartiche sghembe razionali con un punto doppio, in quanto si considerino come forme limiti delle quartiche sghembe ellittiche, o delle quartiche razionali, senza punti doppi.

Rispetto alla varietà delle corde e alla sviluppabile osculatrice della curva variabile nella famiglia V , i punti propri ed impropri si comportano in modo essenzialmente diverso.

Quando C acquista il punto doppio proprio P , la congruenza delle corde della curva variabile ha per limite la *sola* varietà delle corde della curva limite, e la sviluppabile osculatrice ha per limite la sviluppabile oscula-

trice alla curva limite, insieme al fascio di raggi individuato dalle due tangenti in P, contato doppiamente.

Mentre, allorchè C acquista il punto doppio improprio P, la varietà delle corde della curva variabile ha per limite una congruenza spezzata nella varietà delle corde della curva limite ed in una stella di raggi, di centro P, situata in un S_3 , la cui posizione dipende dalla legge colla quale la curva variabile si avvicina alla curva limite. La sviluppabile osculatrice ha invece per limite la *sola* sviluppabile osculatrice della curva limite.

Quando la curva C_p variabile in V, si spezza in 2 parti C'_{p_1}, C''_{p_2} , aventi δ punti comuni, questi punti saranno propri rispetto a V ogni volta sia $p = p_1 + p_2 + \delta - 1$. Che se $p < p_1 + p_2 + \delta - 1$, qualcuna delle intersezioni di C', C'' , è un punto doppio improprio.

La condizione che s'impone alle curve di V, volendo che acquistino un nuovo punto doppio proprio in un punto non dato di S_r , è di dimensione 1; mentre l'imposizione di un punto doppio improprio, in un punto non dato, è una condizione $(r-2)$ -pla, *sempre che, beninteso, le condizioni suddette sieno compatibili colla definizione della famiglia V.*

6. IL TEOREMA FONDAMENTALE PER LE FAMIGLIE NON SPECIALI. — Sia, nello S_r , una famiglia V non speciale di curve C_p^n ($n \geq p + r$). Dal fatto che alla famiglia V' delle curve piane irriducibili d'ordine n , con $h = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$ nodi, *le quali possono considerarsi tutte come proiezioni delle C_p^n* , appartiene (n. 4) ogni curva spezzata in una curva irriducibile d'ordine $n-1$ e genere $p-1$ ed in una retta, si deduce agevolmente che V contiene curve composte mediante una C_{p-1}^{n-1} irriducibile ed una sua corda. Ma non è perciò detto nè che V contenga *ogni* curva così composta, nè quindi che le rette che entrano come componenti nelle suddette C_p^n spezzate, sieno proprio corde o non piuttosto i -secanti ($i \geq 3$) delle relative C_{p-1}^{n-1} . Nulla di assurdo ci sarebbe in ciò, perchè in tal caso fra questi i punti d'appoggio, $i-2$ dovrebbero esser punti doppi impropri rispetto alle curve di V.

Per provare che effettivamente V contiene ogni curva spezzata in una C_{p-1}^{n-1} ed in una corda di questa, procediamo così: L'imposizione di 2 punti doppi propri alle curve di V, equivale a 2 condizioni (al più), sicchè si avranno in $V \infty^k$ curve siffatte, ove

$$k \geq \lambda \quad (\lambda = n(r+1) - (r-3)(p-1) - 2).$$

La varietà Σ di queste curve, può essere riducibile, e può anche darsi che qualcuna delle sue parti sia di dimensione λ , e qualche altra di dimensione $\lambda+1$. Comunque è certo che una, D, delle curve di V composte con una C_{p-1}^{n-1} e con una corda a di questa (la quale sia eventualmente i -secante), in quanto è appunto una C_p^n con 2 punti doppi propri (e forse $i-2$ im-

propri) appartiene ad una varietà irriducibile $W \infty^\lambda$ contenuta in Σ . Ora è facile vedere che ogni curva di W è spezzata.

Infatti le proiezioni piane della D e di una \bar{D} di W ad essa infinitamente vicina, hanno lo stesso numero $h + 2$ di punti doppî, sicchè anche la proiezione della \bar{D} , e perciò la \bar{D} stessa, pel principio già ricordato di Enriques, è spezzata. Ed è poi chiaro che lo spezzamento di \bar{D} non può aver luogo che in una C_{p-1}^{n-1} ed in una sua corda. Le curve di W sono dunque spezzate tutte come D , e quindi W è contenuta nella varietà W_1 delle curve composte da una qualsiasi C_{p-1}^{n-1} e da una qualsiasi corda di questa. Ma poichè anche W_1 è irriducibile e di dimensione λ , si conclude che W coincide con W_1 .

Ricordiamoci ora che un qualunque $(n - p)$ -latero di genere effettivo zero in S_r , è contenuto nella varietà delle curve razionali d'ordine $n - p$. Siccome ogni tal curva, insieme ad una sua corda, dà una curva appartenente alla varietà delle curve ellittiche di S_r , se ne trae che a questa varietà appartiene ogni $(n - p)$ -latero di genere effettivo zero, insieme ad una sua corda; e così risalendo dal genere 1 al genere 2, ed in generale da $p - 1$ a p , si arriva al teorema fondamentale:

Alla famiglia non speciale V delle C_p^n di S_r ($n \geq p + r$), appartiene ogni n -latero composto mediante un $(n - p)$ -latero di genere effettivo zero, insieme a p corde generiche di questo.

In particolare si possono prendere $n - p$ rette a_1, a_2, \dots, a_{n-p} , di cui ciascuna sia appoggiata alla successiva, ma l'ultima sia sgheмба colla prima, e p corde generiche dell' $(n - p)$ -latero $a_1 a_2 \dots a_{n-p}$; oppure $n - p - 1$ rette generiche a_2, \dots, a_{n-p} , appoggiate ad a_1 , e p corde generiche di questo $(n - p)$ -latero. Si osserverà che così si ottiene un n -latero rappresentante tipico della famiglia V , nel quale mai tre lati giacciono in un piano.

Per ottenere gli n -lateri contenuti in V , si può anche imporre alle curve di V di acquistare $n + p - 1$ punti doppî propri, perchè in tal modo la sviluppabile osculatrice di C_p^n , che è d'ordine $2(n + p - 1)$, viene a spezzarsi in $n + p - 1$ fasci di raggi contati doppiamente, e quindi la curva riducesi ad un sistema connesso di rette. Così s'impongono $n + p - 1 - \epsilon$ ($\epsilon \geq 0$) condizioni, per guisa che l'infinità degli n -lateri contenuti in V risulta espressa da:

$$\begin{aligned} k_{n,r} &= n(r + 1) - (r - 3)(p - 1) - (n + p - 1 - \epsilon) = \\ &= nr - (r - 2)(p - 1) + \epsilon. \end{aligned}$$

D'altronde, che $k_{n,r}$ non sia inferiore ad $nr - (r - 2)(p - 1)$, risulta pur da ciò che gli n -lateri di genere effettivo p in S_r , dipendono almeno da tante costanti, perchè la condizione d'incidenza di due rette è di dimensione $r - 2$. Vedremo al n. 8 che la varietà degli n -lateri contenuti in V è spezzata e che in essa vi sono generalmente parti di diverse dimensioni;

ma possiamo subito provare che *tuttavia in V vi è sempre una famiglia completa di n-lateri, che ha la dimensione regolare* $nr - (r - 2)(p - 1)$.

La cosa si dimostra per induzione, a partire da un $(n - p)$ -latero di genere effettivo zero, costituito da $n - p - 1$ rette incidenti ad una medesima ed osservando che l'aggiunta di una corda generica ad un $(n - p + i)$ -latero ($i = 0, 1, \dots, p - 1$), aumenta l'ordine ed il genere effettivo di un'unità ed il numero dei parametri di 2 unità.

7. COME UNA FAMIGLIA SPECIALE SI POSSA CONSIDERARE PARZIALMENTE CONTENUTA IN UNA NON SPECIALE. — Abbiassi in S_r una famiglia speciale ($n < p + r$) di C_p^n irriducibili. Dal n. 4 risulta che la generica proiezione piana C' di C_p^n , insieme a δ rette del piano, ove $n + \delta \geq p + r$, qualora si consideri come inesistente, per ogni retta aggiunta, uno dei punti ov'essa incontra C' , appartiene alla famiglia delle curve piane irriducibili d'ordine $n + \delta$ e genere p . E poichè ognuna di queste curve è proiezione di qualche $C_p^{n+\delta}$ di S_r , se ne trae agevolmente che *la curva speciale C_p^n di S_r insieme a δ sue rette secanti, ove $\delta \geq p + r - n$, può considerarsi con un elemento della famiglia non speciale delle $C_p^{n+\delta}$ irriducibili di S_r .*

Alla stessa conclusione si perviene nel modo seguente, dal quale risulta di più che le δ secanti, da aggiungersi a C_p^n , non secano altrove la curva. Si consideri un S'_r sghembo con S_r , e pongasi un'omografia fra S_r, S'_r . La curva C_p^n viene mutata in una C'^n_p di S'_r , e le congiungenti delle coppie di punti omologhi di C, C' , generano una rigata F , di genere p e ordine $2n$, rispetto alle cui generatrici le C, C' sono unisecanti. Si prova, senza difficoltà, che su F le C, C' appartengono ad un medesimo fascio $|C|$, di grado 0. Se pertanto s'aggiunge a $|C|$ una serie lineare g^e_δ ($e > 0$) di generatrici di F , il sistema lineare somma, di curve unisecanti, d'ordine $n + \delta$ e genere p , sarà irriducibile. Proiettando in S_r , e tenendo conto dell'osservazione con cui si chiude il n. 1, si conclude col teorema enunciato.

Un'analisi ulteriore proverebbe anzi che le δ rette secanti possono scegliersi ad arbitrio.

8. IL TEOREMA FONDAMENTALE PER LE C_p^n DI UNA FAMIGLIA QUALUNQUE. — Sia in S_r una famiglia V di C_p^n . Se $n < \frac{r}{r+1}p + r$, le curve di questa famiglia sono a moduli particolari (n. 3). Per valutare la dimensione x di V , si può ripetere il ragionamento svolto da Noether per le curve gobbe ⁽¹⁷⁾, e si trova così per x il limite inferiore (3) (n. 3).

Dunque: *Una famiglia qualunque di C_p^n , nello S_r , ha dimensione non minore di $n(r + 1) - (r - 3)(p - 1)$.*

⁽¹⁷⁾ Noether, loc. cit., pag. 19. Trattandosi qui di trovare un limite inferiore per x , non occorre alcuna considerazione del tipo di quelle esposte al n. 3, ove si voleva pervenire ad un'uguaglianza (valida per le famiglie di curve a moduli generali).

L'eccesso e di questa dimensione, sul limite inferiore (3), lo chiameremo l'*irregolarità* di V . Per $n \geq \frac{r}{r+1}p + r$ la famiglia è di certo *regolare*.

Sia ora δ un intero per cui sia soddisfatto il teorema del num. prec.; e sia inoltre W la famiglia non speciale delle $C_p^{n+\delta}$ di S_r . Con un ragionamento analogo a quello esposto nel n. 6, si prova che le curve composte mediante una C_p^n di V , alla quale vengono aggiunte δ rette secanti generiche, costituiscono una *parte* della varietà formata dalle curve di W dotate di δ punti doppi propri. Si perviene così alla relazione

$$x + r\delta = (n + \delta)(r + 1) - (r - 3)(p - 1) - \delta + e \quad (e \geq 0),$$

donde si trae di nuovo $x = n(r + 1) - (r - 3)(p - 1) + e$.

Imponiamo ora alle curve di V di acquistare $n + p - 1$ punti doppi propri, cioè di spezzarsi in n rette. Si può subito osservare che *queste condizioni son compatibili colla definizione di V* . Infatti il cono Γ che proietta una generica C_p^n da un punto O , fuori di S_r , contiene un sistema lineare ∞^{r+1} di sezioni iperpiane, fra cui c'è la C_p^n data ed i gruppi di n generatrici staccati su Γ dagl'iperpiani (di S_{r+1}) uscenti dal vertice O . Proiettando tutto sullo S_r primitivo, da un generico punto P di S_{r+1} , si ha in S_r un sistema irriducibile ∞^{r+1} , di curve C_p^n , cui appartengono la curva data ed ∞^r n -lateri. Poichè questo sistema è contenuto in V (n. 1), si conclude che V contiene effettivamente curve degenerate in gruppi di n rette distinte.

Gli $n + p - 1$ punti doppi propri imposti, equivalgono ad $n + p - 1 - \varepsilon$ ($\varepsilon \geq 0$) condizioni, cosicchè esistono in V infiniti n -lateri dipendenti da $nr - (r - 2)(p - 1) + e + \varepsilon$ parametri. Ciascuno di questi punti n -lateri, insieme a δ sue rette secanti, fornisce un $(n + \delta)$ -latero di W . Si ottiene in tal modo in W una varietà di $(n + \delta)$ -lateri, di dimensione $(n + \delta)r - (r - 2)(p - 1) + e + \varepsilon$, e si prova così che *ad una famiglia non speciale W , la quale contenga parzialmente una famiglia irregolare di curve, appartengono due o più varietà irriducibili di n -lateri, di cui alcune di dimensione regolare e le altre di dimensione irregolare*.

Ci resterebbe da mostrare che gli n -lateri esistenti in V son privi di punti doppi impropri, cioè che il loro genere effettivo coincide col genere virtuale p . Rimandiamo al n. 9 per talune induzioni in proposito, riservandoci di completare questo punto nel lavoro più esteso. Enunceremo concludendo che:

In ogni famiglia V di curve C_p^n dello S_r , esistono almeno $\infty^{rn - (r - 2)(p - 1)}$ n -lateri di genere p . L'irregolarità di V non supera la massima irregolarità d'una famiglia completa di n -lateri di genere p in S_r .

Un'altra disuguaglianza cui soddisfa e , è la seguente, che si ottiene con semplici considerazioni di geometria sopra una curva:

L'irregolarità di V non supera $(r - 2)i$, i essendo l'indice di specialità della generica C_p^n .

9. SULL'INVERSIONE DEL TEOREMA FONDAMENTALE. — Dato in S_r un n -latero (connesso) $L \equiv a_1 a_2 \dots a_n$, di genere effettivo $p \geq 0$, è possibile costruire una famiglia di curve irriducibili C_p^n di S_r , cui appartenga L ? Per rispondere a questa domanda, osserviamo anzitutto che *tutti gli n -lateri aventi lo stesso schema di connessione, formano una varietà irriducibile.*

Dicendo che due n -lateri hanno lo stesso *schema di connessione* o che sono *isomorfi*, intendiamo che si possa porre fra i loro lati una corrispondenza biunivoca tale, che a due lati incidenti dell'uno rispondano due lati incidenti dell'altro, e viceversa.

Per dimostrare la proposizione enunciata, si può profittare ad esempio del fatto che, dato un n -latero L di genere $p \geq 0$, è sempre possibile di scegliere $n - 1$ vertici, i quali bastino a stabilire la connessione fra i lati di L , per guisa che, dopo ciò, L possa considerarsi come proiezione di un n -latero L_0 di genere effettivo zero, appartenente ad S_n , ed avente p corde appoggiate al centro di proiezione (n. 4). L'affermazione enunciata, si riconduce allora all'altra, pressochè evidente, che in S_n gli n -lateri isomorfi fra loro, costituiscono una sola varietà.

Premesso questo, ricordiamoci (n. 4) che, dato in S_r lo n -latero L , esiste sempre qualche curva razionale C , ad esso infinitamente vicina, la quale possiede $q \leq p$ nodi infinitamente prossimi ad altrettanti vertici di L . Ne deriva che esiste una sottofamiglia V di curve razionali con q punti doppi, alla quale appartengono tutti gli n -lateri isomorfi con L .

Proiettiamo genericamente la C sopra un piano. Poichè la proiezione C' appartiene alla famiglia delle curve piane irriducibili, d'ordine n e genere q , se ne deduce, se $n \geq q + r$, che C appartiene alla famiglia W delle C_q^n di S_r . La sottofamiglia V è pertanto contenuta in W , ed a W appartengono perciò tutti gli n -lateri isomorfi con L . Rispetto a W , $n + q - 1$ nodi di L son propri, e gli altri $p - q$ impropri.

Se poi $n < q + r$ si giunge ad una conclusione analoga, usufruendo del teorema di Riemann-Roch, per le curve non aggiunte⁽¹⁸⁾. Dunque:

Dato in S_r un n -latero (connesso) di genere effettivo $p \geq 0$, esso definisce sempre qualche famiglia di curve irriducibili d'ordine n e genere $q \leq p$, prive di punti multipli. Rispetto alle curve di questa famiglia, $p - q$ nodi del dato n -latero sono da considerarsi come impropri. Due n -lateri isomorfi, definiscono la stessa famiglia.

(18) Noether, *Ueber die Schnittpunktsysteme einer algebraischen Curve mit nicht-adjungirten Curven* (Math. Annalen, 15, 1879), pag. 507.

È appena necessario di avvertire che deve esistere qualche condizione complementare, affinchè un n -latero di genere effettivo p , definisca, in S_r , una famiglia di C_p^n irriducibili, senza punti multipli, e di genere uguale a p . È ben noto infatti che il genere delle C_p^n irriducibili, senza punti multipli, di S_r , non può sorpassare un certo massimo, assegnato, per r qualunque, da Castelnuovo; e che d'altra parte, come ha provato Halphen (per $r=3$), anche al disotto di questo massimo, vi sono lacune nei valori possibili di p .

Ritengo per certo che la risposta a tale importante questione debba ottenersi mediante il teorema di Riemann-Roch per le curve spezzate ⁽¹⁹⁾; ma su ciò, come ho detto, mi propongo di ritornare. Il risultato definitivo dovrebbe esser questo:

« La condizione necessaria e sufficiente perchè un n -latero L , di genere « effettivo $p \geq 0$, definisca in S_r una famiglia di C_p^n irriducibili (senza punti « multipli), quando $n < p + r$, è che per gli h punti doppi della generica « proiezione piana L' di L , provenienti dai punti doppi apparenti di L , pas- « sino almeno $\infty^{p+r-n-1}$ curve d'ordine $n-4$, le quali non contengano come « parte alcuna retta di L' . Per $n \geq p + r$, non si richiede alcuna condizione ».

Una volta provato questo, si potrà completare il teorema del n. prec., perchè ne deriverà la possibilità di costruire in S_r un n -latero di genere effettivo p , isomorfo con un n -latero M di genere virtuale p , contenuto in una data famiglia V di C_p^n , ove beninteso l'isomorfismo fra L, M , si ponga astruendo dagli eventuali punti doppi impropri di M . Si concluderà così che a V appartiene anche lo n -latero L .

Non va inoltre taciuto che *due n -lateri non isomorfi posson anche definire la stessa famiglia*. Questa circostanza si verifica pure nel caso più semplice delle curve razionali. Così, p. es., nello spazio ordinario, i quadrilateri $a_1 a_2 a_3 a_4$ collo schema di connessione (12) (23) (34) — in cui cioè a_2 appoggiasi ad a_1, a_3 ad a_2, a_4 ad a_3 — ed i quadrilateri collo schema (12) (13) (14), definiscono entrambi la famiglia delle quartiche di 2^a specie. Ciascuno dei due schemi suddetti dà luogo ad una famiglia regolare di quadrilateri, che contiene 13 costanti.

Quando i due n -lateri dipendono dallo stesso numero di parametri, un criterio sufficiente, per decidere s'essi definiscono o no famiglie distinte, è dato dalla considerazione delle superficie (o forme) del minimo ordine a cui essi appartengono.

Per es. nel caso $n=9, p=10$, le due famiglie distinte di curve gobbe, incontrate per la prima volta da Halphen, son definite da due 9-lateri dei tipi seguenti:

1) Sei lati son generatrici di una schiera rigata e gli altri 3 generatrici della schiera rigata incidente.

⁽¹⁹⁾ Noether, *Ueber die reductiblen algebraischen Curven* (Acta math., 8, 1886), pag. 161.

2) I 9 lati son le intersezioni di una superficie generale del 3° ordine, con 3 de' suoi piani tritangenti.

I 9-lateri di questi due tipi dipendono ciascuno da un numero regolare, 18, di costanti, e definiscono famiglie distinte, perchè per quelli del tipo 1) le superficie minime son quadriche, mentre per gli altri son superficie del 3° ordine.

10. APPLICAZIONI A QUESTIONI DI POSTULAZIONE. — La degenerazione delle curve algebriche in sistemi di rette, si applica utilmente alle questioni di postulazione; e si posson così ottenere, in questo campo, molti risultati nuovi.

Mi limiterò ad un esempio, calcolando la postulazione offerta alle forme d'ordine l di S_r , da una C_p^n generica, con $n \geq p + r$.

Poichè, appena sia $l \geq 2$, l'ordine della $g_{nl}^{r_l}$, staccata su una C_p^n dalle forme di ordine l , è non speciale, sarà $r_l \leq nl - p$, e quindi la postulazione P_l non supererà $nl - p + 1$. D'altronde, quando C_p^n degenera in un $(n - p)$ -latero di S_r , collo schema (12) (13) ... (1, $n - p$), ed in p corde generiche di questo $(n - p)$ -latero, si trova subito che la postulazione è esattamente $nl - p + 1$; e poichè, particolarizzando C_p^n nella propria famiglia, la postulazione non può crescere, così si conclude che $P_l = nl - p + 1$. Dunque:

L'ordine minimo delle forme di S_r che contengono una generica C_p^n , quando $n \geq p + r$, è il minimo intero λ per cui $\binom{\lambda + r}{r} + p \geq n\lambda + 2$.

Le forme d'ordine $l \geq \lambda$ staccano su C_p^n una serie completa non speciale.

Naturalmente, quando C_p^n si particolarizza entro la propria famiglia, l'ordine minimo suddetto potrà abbassarsi e potrà perciò non valer più il teorema precedente. Così, ad es., per una generica quintica gobba razionale, è $\lambda = 3$; ma, come si sa, vi sono anche quintiche razionali (irriducibili) tracciate su quadriche.

11. APPLICAZIONI ALLA GEOMETRIA NUMERATIVA. — Dalla possibilità che una C_p^n di S_r , variando nella propria famiglia, possa degenerare in un n -latero di genere p , si deduce la completa giustificazione dei metodi di spezzamento parziale o totale, usati da vari Autori per la determinazione di numeri inerenti alle curve algebriche, nonchè la legittimità delle applicazioni del metodo funzionale di Cayley.

È vero che non si potrà sempre ricorrere allo spezzamento totale in rette, perchè potrà darsi che il numero che si ricerca divenga infinito, per inevitabili legami sussistenti fra i lati di un n -latero, appartenente ad una data famiglia. Così, ad es., chi voglia l'ordine della rigata delle trisecanti di una C_p^n gobba, non potrà senz'altro ricorrere alla degenerazione in rette, perchè potrebbe darsi che, nella famiglia di C_p^n , ogni n -latero dovesse avere di necessità tre o più rette in un piano. È appunto questo il caso della C_{10}^9 del tipo 2) considerato alla fine del n. 9.

Ma comunque, profittando dei teoremi dei nn. 6, 7, si potrà sempre pervenire rigorosamente al risultato, nel modo che ora indichiamo, riferendoci per brevità alla rigata delle trisecanti di una C_p^n gobba.

Se $n \geq p + 3$, la C_p^n può degenerare in un n -latero L , di genere effettivo p , tale che mai più di due lati di L stanno in un piano (n. 6). L'ordine della rigata delle trisecanti si valuterà quindi subito, riferendosi alla *rigata* delle trisecanti di L . Si troverà così per quest'ordine l'espressione ben nota $\varphi(n, p)$, che non occorre qui trascrivere, bastandoci di avvertire ch'essa risulta evidentemente funzione soltanto di n, p . Dopo ciò si supponga che la C_p^n sia qualunque, anche con $n < p + 3$.

Si potranno allora aggiungere ad essa δ rette secanti, per guisa da ottenere una $C_p^{n+\delta}$, appartenente alla famiglia delle curve gobbe irriducibili d'ordine $n + \delta \geq p + 3$. L'ordine della rigata delle trisecanti di C_p^n , si otterrà allora togliendo da $\varphi(n + \delta, p)$, δ volte l'ordine della rigata formata dalle corde di C_p^n appoggiate ad una sua secante; $\binom{\delta}{2}$ volte l'ordine della rigata formata dalle rette appoggiate a C_p^n e a 2 delle sue δ secanti; e infine $\binom{\delta}{3}$ volte l'ordine della schiera rigata costituita dalle rette appoggiate a 3 delle δ secanti di C_p^n ; i quali ordini sono evidentemente funzioni delle sole n, p . L'ordine della rigata delle trisecanti di C_p^n , risulterà dunque, in ogni caso, funzione delle sole n, p , e dovrà pertanto coincidere colla funzione $\varphi(n, p)$ prima trovata.

Come ho detto, con procedimenti di questo genere, si giustifica in ogni caso anche l'applicazione del metodo funzionale di Cayley. Nè fanno eccezione i problemi relativi a coniche plurisecanti di curve gobbe (Berzolari, Severi), giacchè in questi casi, qualora, per la ragione detta sopra, non serva lo spezzamento in rette, si potrà ricorrere ad uno spezzamento misto della C_p^n in rette, coniche, cubiche gobbe, spezzamento la cui legittimità si stabilisce, per $n \geq p + 3$, con procedimenti analoghi a quelli già sviluppati (n. 6). E si osserverà poi che l'aggiunta di convenienti rette o coniche o cubiche, ad una qualunque C_p^n ($n < p + 3$), dà luogo ad una C_p^m ($m > n$) appartenente ad una famiglia non speciale (cfr. col n. 7).

Queste considerazioni fanno senz'altro prevedere come sia possibile assumere rigorosamente alla seguente conclusione generale:

Ogni numero inerente ad una C_p^n di S_r , in quanto sia relativo ad una condizione algebrica che abbia senso per una curva qualunque di ordine e genere dati, è una funzione razionale delle sole variabili n, p .

12. APPLICAZIONI ALLE QUESTIONI DI REALTÀ. — Dirò in proposito soltanto poche parole, perchè applicazioni di questo genere si prevedono senz'altro, quando si tenga presente il metodo cosiddetto della « piccola variazione », che si usa nelle questioni di realtà per le curve piane.

Dato un n -latero reale L di genere effettivo o virtuale p , appartenente ad una famiglia V di C_p^n irriducibili di S_r , a partire da un punto vicino ad un lato, si segua il lato stesso, finchè si arrivi vicino ad un punto doppio proprio P . Senza bruschi cambiamenti nella curvatura della traiettoria, si prosegua allora lungo il lato che si connette al precedente attraverso P , e così di seguito. Si otterrà una traiettoria che rappresenterà con grande approssimazione la forma di una curva di V vicina ad L , ed avente perciò, rispetto alle curve della famiglia, il massimo numero di rami reali, purchè si osservino inoltre queste due regole, d'immediata giustificazione:

1) Ad ogni segmento d'un lato di L , che non contenga nodi propri, deve esser sempre vicino uno ed un sol pezzo della traiettoria.

2) Quando s'incontra un punto doppio improprio Q , si deve proseguire a mantenersi vicini al lato lungo cui si camminava, come se Q non ci fosse.

Per contare i rami *graficamente* distinti della curva, si avvertirà che due rami metricamente distinti, i quali siano « paralleli » a due semiragghi opposti, situati sullo stesso lato a di L , ed aventi per origini due diversi nodi propri, si riconnettono attraverso al punto all'infinito di a (supposto, beninteso, ch'esso non sia un nodo proprio).

Matematica. — *Sopra una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. Se l'elemento lineare ds dello spazio euclideo, riferito ad un sistema triplo ortogonale (u_1, u_2, u_3) , assume la forma

$$(1) \quad ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + H_3^2 du_3^2,$$

si sa che le sei rotazioni β_{ik} , definite dalle formole

$$\beta_{ik} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_k}{\partial u_i} \quad (i \neq k),$$

soddisfano al sistema delle nove equazioni differenziali del primo ordine:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il} \beta_{lk} \\ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} = -\beta_{il} \beta_{lk}, \end{array} \right.$$

dove (i, k, l) indica una qualunque permutazione degli indici 1, 2, 3.

Viceversa, se le sei funzioni β_{ik} di u_1, u_2, u_3 verificano le (2), esistono infiniti sistemi tripli ortogonali con queste rotazioni e dipendenti da tre funzioni arbitrarie. La ricerca di questi sistemi tripli ortogonali si può com-

piere in due modi diversi, sostanzialmente equivalenti ⁽¹⁾. Il primo modo consiste nell'assumere come incognite i coefficienti H_1, H_2, H_3 nella (1), ed allora queste tre funzioni debbono unicamente soddisfare al sistema lineare:

$$(3) \quad \frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k \quad (i \neq k).$$

Nel secondo modo si prendono invece come incognite le tre distanze (algebriche), che diremo W_1, W_2, W_3 , di un punto fisso dello spazio (p. es. dell'origine) dalle tre facce del triedro principale. In tal caso le W_i debbono soddisfare al sistema, che diremo l'*aggiunto* di (3):

$$(3^*) \quad \frac{\partial W_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} W_k \quad (i \neq k).$$

Si osservi che se (H_1, H_2, H_3) , (W_1, W_2, W_3) sono due terne qualunque di soluzioni, la prima del sistema (3), l'altra dell'aggiunto (3*), si ha:

L'espressione $H_1 W_1 du_1 + H_2 W_2 du_2 + H_3 W_3 du_3$ è un differenziale esatto.

Le ricerche contenute nella presente Nota muovono dal considerare che, in molte questioni concernenti i sistemi tripli ortogonali, si riscontra come una reciprocità fra le proprietà che dipendono dalle H_i e quelle che si riferiscono alle W_i .

Ora si sa che in quei sistemi tripli ortogonali (u_1, u_2, u_3) in cui la famiglia $u_3 = \text{cost}$ consta di superficie a curvatura costante, basta scegliere convenientemente i parametri u_1, u_2 perchè i coefficienti H_1^2, H_2^2 risultino legati da una relazione lineare

$$H_1^2 + c H_2^2 = \text{cost},$$

dove c è una costante che si può porre, del resto, senza alterare la generalità, $= \pm 1$. Dopo ciò, risulta naturale la domanda se esistono sistemi tripli ortogonali, corrispondenti in certo modo ai superiori secondo l'accennata legge di reciprocità, e pei quali si verifichi una relazione della forma

$$(a) \quad W_1^2 + c W_2^2 = \text{cost},$$

dove ora per altro il valore della costante c risulterà essenziale, e soltanto saranno da escludersi i casi impossibili $c = 0, c = 1$ ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Ved. Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux* (2^a ediz., 1910. Livre III, chap. V), od anche le mie *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II, § 413.

⁽²⁾ Se fosse $c = 0$, le superficie $u_1 = \text{cost}$ dovrebbero ridursi ad un'unica sfera. Se $c = 1$, le curve (u_3) avrebbero tutte le tangenti a distanza costante dall'origine e sarebbero tutte tracciate sopra una sfera col centro in questo punto, casi manifestamente assurdi.

Siccome W_1, W_2 sono le distanze dall'origine dei piani principali delle superficie $u_3 = \text{cost}$, la (a) rappresenta un'equazione del secondo ordine a cui tutte le $u_3 = \text{cost}$ debbono soddisfare, sicchè il problema proposto è il seguente:

Trovare tutte le famiglie di Lamè composte di superficie integrali della equazione (a) a derivate parziali del secondo ordine.

Si vedrà che esistono in effetto infiniti di tali sistemi tripli ortogonali e dipendono da tre funzioni arbitrarie *essenziali*. Questi sistemi tripli godono di singolari proprietà geometriche, che sono del resto comuni anche a tutti i loro sistemi paralleli, e per le quali i sistemi stessi vengono a collegarsi colle congruenze pseudosferiche.

Avvertiamo che nelle ricerche seguenti sarà trascurato, come ovvio, il caso che nel sistema triplo figurì una serie di sviluppabili, e per ciò supporremo che *nessuna delle rotazioni β_{ik} si annulli*.

2. Per trattare analiticamente il nostro problema dobbiamo aggregare al sistema delle equazioni (2) e (3*) per le nove funzioni incognite β_{ik}, W_i l'equazione in termini finiti (a) fra W_1, W_2 . Scrivendo in primo luogo per disteso le (2), abbiamo il sistema:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_3} = \beta_{13} \beta_{32}, \quad \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_1} = \beta_{21} \beta_{13}, \quad \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_2} = \beta_{32} \beta_{21} \\ \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_3} = \beta_{23} \beta_{31}, \quad \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_1} = \beta_{31} \beta_{12}, \quad \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_2} = \beta_{12} \beta_{23} \\ \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} = -\beta_{31} \beta_{32}, \quad \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} + \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3} = -\beta_{12} \beta_{13}, \\ \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_3} + \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} = -\beta_{23} \beta_{21}, \end{array} \right.$$

e similmente per la (3*)

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} * & \frac{\partial W_1}{\partial u_3} = \beta_{12} W_2, \quad \frac{\partial W_1}{\partial u_3} = \beta_{13} W_3 \\ \frac{\partial W_2}{\partial u_1} = \beta_{21} W_1, & * \quad \frac{\partial W_2}{\partial u_3} = \beta_{23} W_3 \\ \frac{\partial W_3}{\partial u_1} = \beta_{31} W_1, \quad \frac{\partial W_3}{\partial u_2} = \beta_{32} W_2 & * \end{array} \right.$$

Ora se l'equazione in termini finiti (a) si deriva rapporto ad u_1, u_2, u_3 mediante le (5), e dai risultati si sopprimono i rispettivi fattori non nulli W_1, W_2, W_3 , si trovano le due equazioni differenziali

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial W_1}{\partial u_1} = -c \beta_{21} W_2 \\ \frac{\partial W_2}{\partial u_2} = -\frac{1}{c} \beta_{12} W_1, \end{array} \right.$$

e l'altra in termini finiti

$$(7) \quad \beta_{13} W_1 + c \beta_{23} W_2 = 0.$$

Paragonando le (6) colle equazioni delle due prime linee in (5) e costruendo le corrispondenti condizioni d'integrabilità, si hanno le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} c \frac{\partial}{\partial u_2} (\beta_{21} W_2) + \frac{\partial}{\partial u_1} (\beta_{12} W_2) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} (\beta_{12} W_1) + c \frac{\partial}{\partial u_2} (\beta_{21} W_1) = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} c \frac{\partial}{\partial u_3} (\beta_{21} W_2) + \frac{\partial}{\partial u_1} (\beta_{13} W_3) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial u_3} (\beta_{12} W_1) + c \frac{\partial}{\partial u_2} (\beta_{23} W_3) = 0. \end{array} \right.$$

Eseguendo le derivazioni colle (4), (5) e (6), ed osservando la (7), troviamo che si riducono alle tre condizioni:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + c \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} = 0 \\ \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} = -c \beta_{21} \beta_{23}, \quad \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} = -\frac{1}{c} \beta_{12} \beta_{13}. \end{array} \right.$$

La prima di queste, combinata colla prima equazione della terza linea in (4), porge

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} = \frac{c}{1-c} \beta_{31} \beta_{32}, \quad \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} = -\frac{1}{1-c} \beta_{31} \beta_{32}.$$

Ed ora, aggregando queste ultime e le due seconde (8) al sistema (4), questo resta risoluto rispetto a due delle derivate di ciascuna rotazione ed assume la seguente forma definitiva:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{ll} * & \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} = \frac{1}{c-1} \beta_{31} \beta_{32}, \quad \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_3} = \beta_{23} \beta_{31}, \\ * & \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_2} = \beta_{32} \beta_{21}, \quad \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_3} = (c-1) \beta_{21} \beta_{23}, \\ \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} = \frac{c}{1-c} \beta_{31} \beta_{32}, & * \quad \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_3} = \beta_{13} \beta_{32}, \\ \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_1} = \beta_{31} \beta_{12}, & * \quad \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3} = \frac{1-c}{c} \beta_{12} \beta_{13}, \\ \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} = -c \beta_{21} \beta_{23}, & \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_2} = \beta_{12} \beta_{23} \quad * \\ \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_1} = \beta_{21} \beta_{13}, & \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} = -\frac{1}{c} \beta_{12} \beta_{13}, \quad * \end{array} \right.$$

Vediamo dunque intanto che: *Se in un sistema triplo ortogonale* (u_1, u_2, u_3) *le superficie* $u_3 = \text{cost}$ *sono integrali della equazione del secondo ordine* (a)

$$W_1^2 + cW_2^2 = \text{cost}$$

le rotazioni β_{ik} *debbono soddisfare al sistema* (I).

Inversamente si vedrà fra breve che ad ogni sistema di rotazioni β_{ik} , che soddisfino le (I), corrisponde un sistema triplo ortogonale della specie richiesta, univocamente determinato a meno di un'omotetia.

Per semplificare le ricerche conviene osservare la seguente singolare proprietà di costruzione nel sistema (I): *Il sistema differenziale* (I) *resta invariato per una permutazione qualunque degli indici* 1, 2, 3, *purchè si eseguisca contemporaneamente sulla costante* c *una corrispondente sostituzione lineare del gruppo diedrale* G_6 *del rapporto anarmonico.*

Per accertarsene basta osservare: 1°) Il sistema (I) non cangia scambiando l'indice 1 con 2 e mutando c in $\frac{1}{c}$; 2°) esso non muta nemmeno

per la permutazione circolare (1, 2, 3), cangiando insieme c in $\frac{1}{1-c}$.

Dopo ciò la proprietà enunciata resta evidente, e ne segue che la corrispondenza (d'isomorfismo oloedrico) fra le 6 permutazioni degli indici e le 6 sostituzioni lineari del gruppo diedrale su c è data da

$$\begin{aligned} 1 \sim c \quad , \quad (123) \sim \frac{1}{1-c} \quad , \quad (132) \sim \frac{c-1}{c} \\ (12) \sim \frac{1}{c} \quad , \quad (23) \sim \frac{c}{c-1} \quad , \quad (13) \sim 1-c. \end{aligned}$$

3. Ed ora la prima questione analitica che si presenta è di esaminare la compatibilità delle 12 equazioni simultanee (I) per le 6 incognite β_{ik} , e valutare il grado di arbitrarietà dell'integrale generale.

Il sistema (I) assegna, per ciascuna delle β_{ik} , due delle derivate prime come prodotto di altre due β , e ciò in guisa che se si costruiscono le 6 corrispondenti condizioni d'integrabilità, delle quali la prima è

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_3} \right) - \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} \right) = \frac{\partial}{\partial u_2} (\beta_{23} \beta_{31}) + \frac{1}{1-c} \frac{\partial}{\partial u_3} (\beta_{31} \beta_{32}) = 0,$$

si trovano tutte soddisfatte. in virtù delle (I) stesse. Il sistema (I) appartiene dunque ad una delle più semplici classi di sistemi lineari canonici *completamente integrabili* del Bourlet⁽¹⁾, ed ammette quindi infinite solu-

(1) Bourlet, *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées* (Annales de l'École Normale Supérieure, tom. VIII, 3^{ème} série suppl. (1891)]. Per il caso semplice attuale ved. anche Darboux (loc. cit.). Livre III, chap. I.

zioni dipendenti da sei funzioni arbitrarie. Precisamente se consideriamo un sistema iniziale di valori per u_1, u_2, u_3 , sia per semplicità $(0, 0, 0)$, le (I) posseggono uno ed un solo sistema di soluzioni β_{ik} , tali che

$$\beta_{21}, \beta_{31}$$

si riducano a due funzioni arbitrariamente date della variabile u_1 , quando vi si fa $u_2 = u_3 = 0$, e similmente

$$\begin{aligned} \beta_{12}, \beta_{32} & \text{ a funzioni date di } u_2, \text{ per } u_1 = u_3 = 0, \\ \beta_{13}, \beta_{23} & \text{ a funzioni date di } u_3, \text{ per } u_1 = u_2 = 0. \end{aligned}$$

Ma osserviamo subito che tre di queste funzioni arbitrarie sono soltanto apparenti, e dipendono dall'arbitrarietà ancora lasciata ai parametri u_1, u_2, u_3 . E così, p. es., senza alterare la generalità, possiamo prescrivere che risulti

$$\begin{aligned} \beta_{21}(u_1, 0, 0) &= 1, \quad \beta_{32}(0, u_2, 0) = 1 \\ \beta_{13}(0, 0, u_3) &= 1. \end{aligned}$$

Concludiamo adunque che in realtà:

L'integrale generale del sistema (I) nelle β_{ik} dipende da tre funzioni arbitrarie essenziali.

Questi risultati conducono naturalmente a cercare di esprimere le 6 incognite β_{ik} per tre sole ausiliarie, e l'opportuna introduzione di queste tre incognite ausiliarie viene suggerita dal riconoscere che il sistema (I), ammette tre integrali quadratici facilmente distinguibili.

Se costruiamo in effetto le tre espressioni

$$(9) \quad \begin{cases} \Omega_1 = (1 - c) \beta_{21}^2 + \beta_{31}^2 \\ \Omega_2 = (1 - c) \beta_{12}^2 - c \beta_{32}^2 \\ \Omega_3 = \beta_{13}^2 + c \beta_{23}^2, \end{cases}$$

riconosciamo che a causa delle (I) stesse si ha identicamente

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_2} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_3} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_1} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_3} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_3}{\partial u_1} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial u_2} = 0 \quad (1),$$

onde segue che Ω_1 è funzione della sola u_1 , Ω_2 della sola u_2 , ed Ω_3 di u_3 . Inoltre se si considera che, cangiando i parametri u_1, u_2, u_3 , le rotazioni β_{21}, β_{31} risultano moltiplicate per un fattore arbitrario funzione di u_1 , e similmente β_{12}, β_{32} per una funzione di u_2 , e β_{13}, β_{23} per una funzione di u_3 , si vede che è lecito alterare $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ per rispettivi fattori *positivi* arbitrarii, ordinatamente funzioni di u_1, u_2, u_3 .

(1) Basta del resto verificare queste ultime ed applicare poi l'osservazione alla fine del n. 2.

Procediamo ora alla riduzione del sistema (I) a forme normali, osservando che ci possiamo limitare a supporre la costante c *negativa*.

E invero, da quanto si è detto alla fine del n. 2, risulta che ogni altro caso si riconduce a questo, effettuando sugli indici la permutazione circolare (123) o il suo quadrato (132), poichè dei tre valori

$$c, \frac{1}{1-c}, \frac{c-1}{c}$$

uno è sempre negativo, gli altri due positivi.

4. Limitandoci dunque al caso di c negativa, poniamo

$$c = -tg^2\sigma,$$

dove σ denota un angolo costante reale (arbitrario).

Secondo le (9), le tre espressioni

$$(10) \quad \frac{\beta_{21}^2}{\cos^2\sigma} + \beta_{31}^2, \quad \frac{\beta_{12}^2}{\sin^2\sigma} + \beta_{32}^2, \quad \frac{\beta_{13}^2}{\sin^2\sigma} - \frac{\beta_{23}^2}{\cos^2\sigma}$$

saranno rispettivamente funzioni la prima di u_1 , la seconda di u_2 , la terza di u_3 . Ma poichè le due prime sono positive, potremo intanto disporre dei parametri u_1, u_2 sì da rendere

$$(10^*) \quad \frac{\beta_{21}^2}{\cos^2\sigma} + \beta_{31}^2 = 1, \quad \frac{\beta_{12}^2}{\sin^2\sigma} + \beta_{32}^2 = 1.$$

Quanto alla terza, avremo da suddividere secondo che è diversa da zero, oppure nulla:

1° caso $\Omega_3 \neq 0$. Senza alterare la generalità, scambiando se occorre i parametri u_1, u_2 , possiamo supporre $\Omega_3 > 0$, ed allora disponiamo anche di u_3 in guisa che si abbia

$$(10^{**}) \quad \frac{\beta_{13}^2}{\sin^2\sigma} - \frac{\beta_{23}^2}{\cos^2\sigma} = 1.$$

La forma delle (10*), (10**) suggerisce l'introduzione di tre funzioni ausiliarie θ, φ, ψ , per le quali esprimiamo le 6 rotazioni colle formole:

$$(11) \quad \begin{cases} \beta_{21} = \cos \sigma \cos \theta, & \beta_{31} = \sin \theta \\ \beta_{12} = \sin \sigma \cos \varphi, & \beta_{32} = \sin \varphi \\ \beta_{13} = \sin \sigma \cosh \psi, & \beta_{23} = \cos \sigma \sinh \psi. \end{cases}$$

Introducendo questi valori delle β_{ik} nelle (I), ove è da farsi inoltre $c = -tg^2\sigma$, il sistema si riduce nelle tre funzioni incognite θ, φ, ψ al seguente:

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{ll} * & \frac{\partial \theta}{\partial u_2} = \cos \sigma \sin \varphi, \quad \frac{\partial \theta}{\partial u_3} = -\sinh \psi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = \sin \sigma \sin \theta, & * \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} = -\cosh \psi \\ \frac{\partial \psi}{\partial u_1} = \sin \sigma \cos \theta, & \frac{\partial \psi}{\partial u_2} = \cos \sigma \cos \varphi \quad * \end{array} \right.$$

Risulta già da quanto si è detto al n. 2, e si può constatare anche subito direttamente, che le condizioni d'integrabilità per questo sistema (II) sono identicamente soddisfatte, onde l'integrale generale (θ, φ, ψ) dipende da tre funzioni arbitrarie (essenziali).

2° caso $\Omega_3 = 0$. In questo secondo caso, avendosi

$$\frac{\beta_{13}}{\sin \sigma} = \pm \frac{\beta_{23}}{\cos \sigma},$$

potremo limitarci a prendere il segno superiore, bastando cangiare nel caso contrario σ in $-\sigma$. Ed allora, mantenendo per $\beta_{21}, \beta_{31}; \beta_{12}, \beta_{32}$ le posizioni fatte in (11), poniamo invece

$$\frac{\beta_{13}}{\sin \sigma} = \frac{\beta_{23}}{\cos \sigma} = e^\psi,$$

dove è da notarsi che, cangiando il parametro u_3 , si può aumentare l'ausiliaria ψ di una funzione arbitraria di u_3 . I valori delle rotazioni saranno dunque ora:

$$(11^*) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \beta_{21} = \cos \sigma \cos \theta, & \beta_{31} = \sin \theta \\ \beta_{12} = \sin \sigma \cos \varphi, & \beta_{32} = \sinh \varphi \\ \beta_{13} = \sin \sigma e^\psi, & \beta_{23} = \cos \sigma e^\psi, \end{array} \right.$$

ed al sistema differenziale (II) si sostituirà l'altro:

$$(II^*) \quad \left\{ \begin{array}{ll} * & \frac{\partial \theta}{\partial u_2} = \cos \sigma \sin \varphi, \quad \frac{\partial \theta}{\partial u_3} = -e^\psi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = \sin \sigma \sin \theta, & * \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} = -e^\psi \\ \frac{\partial \psi}{\partial u_1} = \sin \sigma \cos \theta, & \frac{\partial \psi}{\partial u_2} = \cos \sigma \cos \varphi \quad * \end{array} \right.$$

Anche qui le condizioni d'integrabilità sono soddisfatte, e l'integrale generale (θ, φ, ψ) dipende da tre funzioni arbitrarie.

Inversamente, ad ogni terna (θ, φ, ψ) che soddisfi alle equazioni (II), ovvero alle (II*), corrisponderà (n. 1) un'intera classe di sistemi tripli ortogonali paralleli, le cui rotazioni β_{ik} saranno date dalle (11) nel primo caso, dalle (11*) nel secondo.

5. Ma ora dobbiamo ritornare al nostro problema primitivo (n. 1) e ricercare se fra i sistemi tripli ortogonali anzidetti ne esiste qualcuno in cui le superficie $u_3 = \text{cost}$ soddisfino la equazione (a), la quale, nella nostra ipotesi di

$$c = -\operatorname{tg}^2 \sigma,$$

assume la forma

$$(12) \quad \cos^2 \sigma W_1^2 - \sin^2 \sigma W_2^2 = \text{cost}.$$

Supponiamo dapprima di trovarci nel primo caso del n. 4 in cui valgono le (11) e le (II), ed osserviamo che la equazione (7) n. 2:

$$\beta_{13} W_1 = \operatorname{tg}^2 \sigma \beta_{23} W_2$$

diventa qui per le (11)

$$\cos \sigma \cosh \psi \cdot W_1 = \sin \sigma \sinh \psi \cdot W_2.$$

Possiamo dunque porre:

$$W_1 = \lambda \sin \sigma \sinh \psi, \quad W_2 = \lambda \cos \sigma \cosh \psi,$$

dove λ indica un fattore di proporzionalità, il quale a causa della (12) deve necessariamente essere una costante. Sostituendo al sistema triplo un sistema omotetico, si può fare senz'altro $\lambda = 1$

$$W_1 = \sin \sigma \sinh \psi, \quad W_2 = \cos \sigma \cosh \psi.$$

Dopo ciò le due formole dell'ultima colonna in (5) danno concordemente $W_3 = \frac{\partial \psi}{\partial u_3}$; ed inversamente si vede che, ponendo.

$$(13) \quad W_1 = \sin \sigma \sinh \psi, \quad W_2 = \cos \sigma \cosh \psi, \quad W_3 = \frac{\partial \psi}{\partial u_3},$$

tutte le condizioni (5) risultano verificate dando alle rotazioni β_{ik} i valori (11). Si conclude quindi:

Ad ogni terna (θ, φ, ψ) integrale del sistema (II) corrisponde uno ed un solo sistema triplo ortogonale colle rotazioni β_{ik} date dalle (11), le cui superficie $u_3 = \text{cost}$ soddisfano alla condizione

$$\frac{W_2^2}{\cos^2 \sigma} - \frac{W_1^2}{\sin^2 \sigma} = 1.$$

In effetto un tale sistema è univocamente definito dalle (13).

In simil modo si tratta l'altro caso che le β_{ik} siano date dalle (11*), soddisfacendo θ, φ, ψ al sistema (II*). La (7) n. 2 diventa ora semplicemente

$$\cos \sigma W_1 = \sin \sigma W_2,$$

e noi poniamo in corrispondenza

$$W_1 = \lambda \sin \sigma e^\psi, \quad W_2 = \lambda \cos \sigma e^\psi$$

con λ fattore di proporzionalità. Ma dalle due equazioni (5)

$$\begin{cases} \frac{\partial W_2}{\partial u_1} = \beta_{21} W_1 = \cos \sigma \cos \theta W_1 \\ \frac{\partial W_1}{\partial u_2} = \beta_{12} W_2 = \sin \sigma \cos \varphi W_2 \end{cases}$$

risulta ora

$$\frac{\partial}{\partial u_1} (\lambda e^\psi) = \lambda \sin \sigma \cos \theta e^\psi, \quad \frac{\partial}{\partial u_2} (\lambda e^\psi) = \lambda \cos \sigma \cos \varphi e^\psi,$$

indi per le (II*)

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u_1} = \frac{\partial \lambda}{\partial u_2} = 0.$$

Il fattore λ dipende dunque solo da u_3 , ed anzi, aumentando ψ di una funzione di u_3 (n. 4), possiamo rendere senz'altro $\lambda = 1$. Così troviamo

$$(13^*) \quad W_1 = \sin \sigma e^\psi, \quad W_2 = \cos \sigma e^\psi, \quad W_3 = \frac{\partial \psi}{\partial u_3};$$

e viceversa con questi valori di W_1, W_2, W_3 sono soddisfatte le (5), e ne resta definito un sistema triplo ortogonale della specie voluta.

Si osservi che:

In questi sistemi tripli ortogonali (13) le superficie $u_3 = \text{cost}$ hanno costante ($= \tan \sigma$) il rapporto $\frac{W_1}{W_2}$ delle distanze dall'origine dai piani principali; inoltre le loro traiettorie ortogonali (u_3) sono curve piane.*

Quest'ultima asserzione risulta provata da ciò che il rapporto delle due rotazioni β_{13}, β_{23} è costante.

6. Così abbiamo risoluto il problema proposto solo nel caso che nella equazione (a) il valore della costante c sia negativo. Per altro le considerazioni alla fine del n. 2 ci dimostrano che, per risolverlo negli altri casi, basterà riferirsi sempre alle formole del n. 4 con uno scambio opportuno di indici, effettuando in pari tempo sulla costante c la corrispondente sostituzione lineare. Ora se nella relazione (a)

$$W_1^2 + c W_2^2 = \text{cost}$$

operiamo la sostituzione circolare (123) cangiando in pari tempo c in $\frac{1}{1-c}$. questa diventa

$$W_2^2 + \frac{1}{1-c} W_3^2 = \text{cost.},$$

e ripetendo l'operazione

$$W_3^2 + \frac{c-1}{c} W_1^2 = \text{cost.}$$

Poichè adunque si ha qui $c = -\text{tg}^2 \sigma$, ci resta ancora da esaminare se fra i sistemi tripli ortogonali corrispondenti alle formole (11) o (11*) per le rotazioni ne esistono di quelli che soddisfanno la condizione

$$(14) \quad W_2^2 + \cos^2 \sigma W_3^2 = \text{cost.},$$

e di quelli che soddisfanno l'altra

$$(15) \quad W_1^2 + \sin^2 \sigma W_3^2 = \text{cost.}$$

La questione si risolve affermativamente, ambedue le volte, coll'assegnare gli effettivi valori che debbono darsi a W_1, W_2, W_3 . Il procedimento, affatto analogo a quello del n. 5, consiste nell'aggregare la equazione in termini finiti (14), ovvero la (15), alle equazioni differenziali (3*) per le W . Facciamo i calcoli nel caso delle equazioni (11) e (II) n. 4, ove le equazioni differenziali per le W si scrivono

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial W_1}{\partial u_2} = \sin \sigma \cos \varphi W_2, & \frac{\partial W_1}{\partial u_3} = \cos \sigma \sinh \psi W_3 \\ \frac{\partial W_2}{\partial u_1} = \cos \sigma \cos \theta W_1, & \frac{\partial W_2}{\partial u_3} = \cos \sigma \sinh \psi W_3 \\ \frac{\partial W_3}{\partial u_1} = \sin \theta W_1, & \frac{\partial W_3}{\partial u_2} = \sin \varphi W_2 \end{array} \right. \quad *$$

Se a queste aggregiamo dapprima la (14), derivando questa rapporto ad u_1 , risulta per le (16) stesse

$$\cos \theta W_2 + \cos \sigma \sin \theta W_3 = 0,$$

onde possiamo porre

$$W_2 = \lambda \cos \sigma \sin \theta, \quad W_3 = -\lambda \cos \theta,$$

e λ sarà per la (14) una costante, che possiamo porre $= 1$.

Dopo ciò, p. es., dalla prima equazione della seconda linea in (16)

viene $W_1 = \frac{\partial \theta}{\partial u_1}$; ma inversamente se si prende

$$(17) \quad W_1 = \frac{\partial \theta}{\partial u_1}, \quad W_2 = \cos \sigma \sin \theta, \quad W_3 = -\cos \theta$$

si soddisfano, a causa delle (II), tutte le equazioni (16), e resta quindi definito dalle (17) un sistema triplo ortogonale colle rotazioni (11), e con W_2, W_3 legate dalla relazione

$$\frac{W_2^2}{\cos^2 \sigma} + W_3^2 = 1 .$$

In modo analogo, aggregando invece la (15), si trovano le formole

$$(18) \quad W_1 = \sin \sigma \sin \varphi, \quad W_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, \quad W_3 = -\cos \varphi,$$

che definiscono un altro sistema triplo ortogonale parallelo al precedente, e con W_1, W_3 legate dalla relazione

$$\frac{W_1^2}{\sin^2 \sigma} + W_3^2 = 1 .$$

Da ultimo, se si considera il secondo caso del n. 4 e si suppone che per le β_{ik} valgano le (11*) e per θ, φ, ψ le formole (II*), si trova ancora che le formole stesse (17) e (18) definiscono i due sistemi tripli ortogonali cercato.

7. Tutti i sistemi tripli ortogonali le cui rotazioni β_{ik} soddisfano alle equazioni (I) n. 2 godono di una notevole proprietà geometrica comune di cui diciamo al numero seguente. Qui osserviamo che, in grazia appunto delle particolari relazioni (I) a cui soddisfano le β_{ik} , si possono stabilire delle trasformazioni speciali che danno il passaggio da un sistema triplo ortogonale noto (u_1, u_2, u_3) della specie a nuovi sistemi tripli ortogonali *paralleli al primitivo*.

Sussiste invero la proposizione seguente :

Se le rotazioni β_{ik} soddisfano alle condizioni (I), ed è (W_1, W_2, W_3) una terna qualunque di soluzioni del sistema (3), le formole*

$$(19) \quad \begin{cases} H_1 = \frac{\partial W_1}{\partial u_1} + c\beta_{21}W_2 \\ H_2 = c \frac{\partial W_2}{\partial u_2} + \beta_{12}W_1 \\ H_3 = \beta_{13}W_1 + c\beta_{23}W_2 \end{cases}$$

definiscono una soluzione (H_1, H_2, H_3) del sistema aggiunto.

La verifica è immediata, quando si tenga conto che le β_{ik} soddisfano alle (I), e le W_i alle (3*).

Dall'osservazione alla fine del n. 2 segue poi immediatamente che si ottengono medesimamente nuove terne (H_1, H_2, H_3) di soluzioni delle (3) colle formole

$$(19') \quad \begin{cases} H_1 = \beta_{21} W_2 + \frac{1}{1-c} \beta_{31} W_3 \\ H_2 = \frac{\partial W_2}{\partial u_2} + \frac{1}{1-c} \beta_{32} W_3 \\ H_3 = \frac{1}{1-c} \frac{\partial W_3}{\partial u_3} + \beta_{23} W_2, \end{cases}$$

come pure colle altre

$$(19'') \quad \begin{cases} H_1 = \frac{c-1}{c} \frac{\partial W_1}{\partial u_1} + \beta_{31} W_3 \\ H_2 = \beta_{32} W_3 + \frac{c-1}{c} \beta_{12} W_1 \\ H_3 = \frac{\partial W_3}{\partial u_3} + \frac{c-1}{c} \beta_{13} W_1. \end{cases}$$

Soltanto si osserverà che ad esempio la trasformazione (19) diventa illusoria nel caso in cui il sistema triplo (u_1, u_2, u_3) di partenza sia quello speciale in cui la (a) è soddisfatta, cioè:

$$W_1^2 + c W_2^2 = \text{cost.}$$

In tal caso infatti, per le (6), (7) n. 2, risulta identicamente

$$H_1 = H_2 = H_3 = 0,$$

cioè il sistema trasformato si riduce ad un punto.

Similmente, le formole di trasformazione (19'), diventano illusorie quando

$$W_2^2 + \frac{1}{1-c} W_3^2 = \text{cost.};$$

e le (19'') quando sia

$$W_3^2 + \frac{c-1}{c} W_1^2 = \text{cost.}$$

Alle trasformazioni dei nostri sistemi tripli (u_1, u_2, u_3) definite dalle (19), (19'), (19'') sono da associarsi le loro inverse, nelle quali si suppone data una terna (qualunque) (H_1, H_2, H_3) di soluzioni del sistema (3) e si cerca una terna corrispondente (W_1, W_2, W_3) di soluzioni del sistema aggiunto (3*) che soddisfi inoltre alle (19), ovvero alle (19'), (19''). Si dimo-

stra facilmente che l'inversione domandata è sempre possibile; anzi esistono ∞^1 di tali terne (W_1, W_2, W_3) che si determinano con una quadratura.

8. Veniamo da ultimo a descrivere la proprietà geometrica comune a tutti i sistemi tripli (u_1, u_2, u_3) , colle rotazioni β_{ik} soddisfacenti al sistema (I), a cui sopra è accennato. Essa risulta dalla proposizione seguente:

Le superficie di ciascuna delle tre serie nel sistema triplo sono divise in parallelogrammi infinitesimi d'area costante da un doppio sistema di traiettorie isogonali delle loro linee di curvatura sotto un conveniente angolo.

Avvertiamo però subito che, mentre per una delle tre famiglie le dette traiettorie isogonali sono reali, per le altre due famiglie invece sono immaginarie, l'angolo costante d'inclinazione essendo per esse un immaginario (puro).

Le superficie dotate della proprietà sopra enunciata, di avere cioè per linee di curvatura le bisettrici di un doppio sistema (u, v) che dà al ds^2 la forma caratteristica

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2$$

con

$$EG = 1, \quad F = \text{cost},$$

vennero considerate la prima volta in una mia Memoria del 1890 ⁽¹⁾. La proprietà è comune a tutte le superficie colla stessa rappresentazione sferica, e vale quindi in particolare per la sfera rappresentativa stessa. Qualunque superficie dotata della proprietà in discorso può inserirsi in sistemi tripli ortogonali della nostra classe.

Qui verifichiamo ad esempio che in ogni sistema triplo ortogonale corrispondente alle rotazioni date dalle (11) n. 4, quando θ, φ, ψ soddisfano al sistema (II), sulle superficie $u_3 = \text{cost}$, le traiettorie isogonali sotto l'angolo $\pm \sigma$ delle linee di curvatura dividono la superficie in parallelogrammi infinitesimi equivalenti. Basterà verificare che tale proprietà sussiste nell'immagine sferica, il cui ds'^2 è dato da

$$ds'^2 = \beta_{31}^2 du_1^2 + \beta_{32}^2 du_2^2 = \text{sen}^2 \theta du_1^2 + \text{sen}^2 \varphi du_2^2.$$

Le equazioni differenziali delle traiettorie isogonali, sotto l'angolo $\pm \sigma$, delle linee di curvatura si scrivono

$$\begin{cases} \frac{\text{sen } \theta}{\cos \sigma} du_1 - \frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \sigma} du_2 = 0 \\ \frac{\text{sen } \theta}{\cos \sigma} du_1 + \frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \sigma} du_2 = 0. \end{cases}$$

⁽¹⁾ *Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali.* (Annali di matematica. Serie II, tom. XVIII).

I primi membri di queste ammettono per le (II) i rispettivi fattori integranti $e^{-\psi}$, e^{ψ} , e se poniamo

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \int e^{-\psi} \left(\frac{\text{sen } \theta \, du_1}{\cos \sigma} - \frac{\text{sen } \varphi \, du_2}{\text{sen } \sigma} \right) \\ v = \frac{1}{2} \int e^{\psi} \left(\frac{\text{sen } \theta \, du_1}{\cos \sigma} + \frac{\text{sen } \varphi \, du_2}{\text{sen } \sigma} \right) \end{cases}$$

ne risulta

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta \, du_1 &= \cos \sigma (e^{\psi} du + e^{-\psi} dv) \\ \text{sen } \varphi \, du_2 &= \text{sen } \sigma (-e^{\psi} du + e^{-\psi} dv), \end{aligned}$$

da cui quadrando e sommando

$$ds'^2 = e^{2\psi} du^2 + 2 \cos 2\sigma \, du \, dv + e^{-2\psi} dv^2,$$

che ha appunto la forma caratteristica indicata con $EG = 1$, $F = \text{cost.}$

In generale il problema di trovare sulla sfera i doppi sistemi ortogonali di linee le cui traiettorie isogonali, sotto un conveniente angolo costante, dividono la sfera in parallelogrammi infinitesimi equivalenti si risolve nel modo geometrico più semplice ricorrendo alla teoria delle congruenze pseudosferiche (ved. m. c.). Con questa teoria vengono quindi a collegarsi gli attuali sistemi tripli ortogonali; ed anzi dalle trasformazioni di Bäcklund delle congruenze pseudosferiche (o ciò che torna lo stesso dal teorema di permutabilità) possono dedursi dei nuovi metodi di trasformazione pei nostri sistemi tripli ortogonali in altri della stessa specie, ma con diversa immagine sferica. Si è così ricondotti alla teoria dei *sistemi obliqui di Weingarten*, di cui tratta una mia Memoria del 1912 negli *Annali di matematica* (t. 19°, ser. 3ª). Ma gli sviluppi relativi a queste nuove trasformazioni oltrepasserebbero i limiti di una breve Nota e debbono venire riservati ad una pubblicazione ulteriore.

Anatomia-fisiologica. — *La dottrina dei moti delle sensitive.*
Note anatomo-fisiologiche di A. BORZÌ e G. CATALANO.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

Matematica. — *Il teorema di Eulero per le funzioni di linea omogenee.* Nota della dott.^{ssa} ELENA FREDA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. La funzione di linea $F[\overset{1}{f(x)}_0]$ è omogenea di grado r (r numero reale qualsiasi) se si ha:

$$F[\mu \cdot \overset{1}{f(x)}_0] = \mu^r F[\overset{1}{f(x)}_0]$$

qualunque sia il valore del parametro μ .

Ammettiamo che la funzione F possa anche eventualmente avere (quando non sia detto esplicitamente il contrario) dei punti eccezionali $x_1 x_2 \dots x_n$, tali che la parte del primo ordine della variazione di F , corrispondente ad una variazione infinitesima $\delta f(x)$, data a $f(x)$ in tutto l'intervallo 01, abbia la forma:

$$\delta F = \int_0^1 F'[\overset{1}{f(x)}_0 \xi] \delta f(\xi) d\xi + \sum_s^n A_s [\overset{1}{f(x)}_0] \delta f(x_s) \quad (1).$$

Le stesse ipotesi valgono per tutte le funzioni di linea che considereremo nei paragrafi successivi.

Dalla definizione seguono alcune delle proprietà di cui godono le funzioni di linea omogenee, proprietà corrispondenti a quelle delle funzioni omogenee di n variabili.

2. Sia data la funzione $F[\overset{1}{f(x)}_0]$ omogenea di grado r . Proponiamoci di calcolare il risultato che si ottiene sostituendo nel differenziale (o variazione prima) di F , a $\delta f(x) f(x)$.

Per avere il differenziale di F basta calcolare

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} F[\overset{1}{f(x)}_0 + \lambda \delta f(x)] \right\}_{\lambda=0}.$$

Invece di fare prima questa derivazione e poi la detta sostituzione, possiamo sostituire senz'altro in $F[\overset{1}{f(x)}_0 + \lambda \delta f(x)]$ a $\delta f(x) f(x)$, e poi calcolare

(1) Sulle diverse specie di punti eccezionali di una funzione di linea, cfr. Volterra, *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégrales-différentielles*, pag. 26 (Paris, Gauthier-Villars, 1913).

la derivata rispetto a λ per $\lambda = 0$. Otterremo evidentemente lo stesso risultato. Basta dunque calcolare

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} F[f(x)_0 \cdot (1 + \lambda)] \right\}_{\lambda=0}.$$

Ma poichè F è omogenea di grado r , si ha:

$$F[f(x)_0 \cdot (1 + \lambda)] = (1 + \lambda)^r F[f(x)_0],$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} F[f(x)_0 \cdot (1 + \lambda)] \right\}_{\lambda=0} = r F[f(x)_0].$$

Per le funzioni di linea si ha dunque il seguente teorema, corrispondente al teorema di Eulero per le funzioni omogenee di n variabili:

Se nel differenziale di una funzione di linea omogenea, $F[f(x)_0]$, si sostituisce a $\delta f(x)$ $f(x)$, si ottiene la funzione stessa moltiplicata per il grado di omogeneità.

Se $F[f(x)_0]$ è una funzione senza punti eccezionali, si ha:

$$\delta F = \int_0^1 F' [f(x)_0 \xi] \delta f(\xi) d\xi.$$

Dunque:

Una funzione di linea $F[f(x)_0]$ senza punti eccezionali, omogenea di grado r , soddisfa all'equazione alle derivate funzionali:

$$\int_0^1 F' [f(x)_0 \xi] f(\xi) d\xi = r F[f(x)_0].$$

Quest'ultimo risultato corrisponde al teorema di Eulero nella sua forma ordinaria. Il teorema precedentemente enunciato è più generale, poichè vale anche per le funzioni di linea con punti eccezionali della specie detta.

3. Verifichiamo ora se valga per le funzioni di linea anche il reciproco del teorema di Eulero.

Consideriamo una funzione di linea $F[f(x)_0]$ tale che sostituendo nel suo differenziale a $\delta f(x)$ $f(x)$ si ottenga $r \cdot F[f(x)_0]$; tale cioè che:

$$(A) \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} F[f(x)_0 \cdot (1 + \lambda)] \right\}_{\lambda=0} = r F[f(x)_0].$$

Evidentemente si avrà pure

$$(A') \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} F[\mu \cdot f_0^1(x) \cdot (1 + \lambda)] \right\}_{\lambda=0} = r F[\mu \cdot f_0^1(x)] .$$

Per vedere come la funzione $F[\mu \cdot f_0^1(x)]$ dipenda da μ , calcoliamo la sua derivata rispetto a μ .

Come facilmente si verifica, si ha:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} F[\mu \cdot f_0^1(x)] = \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} F[(\mu + \lambda) \cdot f_0^1(x)] \right\}_{\lambda=0} .$$

Ossia

$$\frac{\partial}{\partial \mu} F[\mu \cdot f_0^1(x)] = \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} F \left[\mu \cdot f_0^1(x) \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \right] \right\}_{\lambda=0} .$$

Da quest'ultima uguaglianza e dalla (A') segue:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} F[\mu \cdot f_0^1(x)] = \frac{r}{\mu} F[\mu \cdot f_0^1(x)] .$$

Quindi:

$$F[\mu \cdot f_0^1(x)] = \mu^r F[f_0^1(x)] .$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione di linea $F[f_0^1(x)]$ sia omogenea di grado r è che sostituendo nel suo differenziale a $\delta f(x)$ $f(x)$ si ottenga la funzione stessa moltiplicata per r .

Per una funzione senza punti eccezionali, tale condizione è equivalente all'altra di essere un integrale dell'equazione alle derivate funzionali:

$$\int_0^1 F'[f_0^1(x) \xi] f(\xi) d\xi = r F[f_0^1(x)] \quad (1).$$

4. Dalla definizione stessa di funzione di linea omogenea, segue immediatamente che la più generale funzione di linea omogenea di grado r può ottenersi moltiplicando la più generale funzione di linea omogenea di grado zero per una particolare funzione di linea omogenea di grado r .

La più generale funzione di linea omogenea di grado zero è data da:

$$\Phi \left[\frac{f_0^1(x)}{\int_0^1 f(\xi) d\xi} \right] \quad (\Phi \text{ funzione arbitraria}) \quad (2).$$

(1) Per il caso $r = 0$, cfr. Volterra, *Sulle equazioni alle derivate funzionali*, § 2, Rend. della R. Accad. dei Lincei, 15 marzo 1914.

(2) Volterra, loc. cit., § 2.

Possiamo dunque prendere come espressione generale di una funzione di linea omogenea di grado r la seguente:

$$(I) \quad F[f(x)] = \Phi \left[\frac{f(x)}{\int_0^1 f(\xi) d\xi} \right] \cdot \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 f^{r_1}(\xi_1) f^{r_2}(\xi_2) \dots f^{r_s}(\xi_s) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_s$$

(Φ funzione arbitraria; $r_1 + r_2 + \dots + r_s = r$).

Da quanto si è detto nei paragrafi precedenti, segue che, se Φ non ha alcun punto eccezionale nell'intervallo 01, la (I) ci dà l'integrale generale dall'equazione alle derivate funzionali:

$$(II) \quad \int_0^1 F' [f(x) \xi] f(\xi) d\xi = r F [f(x)] .$$

Tutto quanto si è dimostrato per le funzioni di una sola linea si estende immediatamente alle funzioni di più linee.

5. L'equazione alle derivate funzionali

$$(III) \quad \int_0^1 F' [\varphi(x) \xi] \theta(\varphi(\xi)) d\xi = r F [\varphi(x)]$$

(F funzione incognita di linea, senza punti eccezionali; θ funzione ordinaria, nota) si può ricondurre alla (II) ponendo:

$$(IV) \quad f(x) = e^{\int_0^{\varphi(x)} \frac{d\psi}{\theta(\psi)}} .$$

La (I) del paragrafo precedente (nell'ipotesi che Φ non abbia punti eccezionali) ci dà dunque, tenendo conto della (IV), l'integrale generale della (III).

Consideriamo ora l'equazione:

$$(V) \quad \int_0^1 \Omega(F' [f(x) \xi]) f(\xi) d\xi = r F [f(x)]$$

(Ω funzione ordinaria).

Poniamo $F' [f(x) \xi] = p(\xi)$. Sostituiamo alle variabili $f(\xi)$ le variabili $p(\xi)$, e alla funzione $F [f(x)]$ la funzione $\Psi [p(x)]$ definita dalla relazione:

$$(B) \quad F [f(x)] = \int_0^1 p(\xi) f(\xi) d\xi - \Psi [p(x)] \quad (1).$$

(1) Questa trasformazione corrisponde a quella di Legendre per le funzioni di n variabili.

Se F non ha punti eccezionali, il suo differenziale è dato da

$$\delta F = \int_0^1 p(\xi) \delta f(\xi) d\xi,$$

e per la (B) si ha:

$$\delta \Psi = \int_0^1 f(\xi) \delta p(\xi) d\xi.$$

Dunque:

$$\Psi' | [p(x) \xi] | = f(\xi).$$

Poniamo:

$$r p(\xi) - \Omega(p(\xi)) = \theta(p(\xi)).$$

La (V) si riduce allora, mediante la detta trasformazione, all'equazione:

$$\int_0^1 \Psi' | [p(x) \xi] | \theta(p(\xi)) d\xi = r \Psi | [p(x)] |.$$

Questa equazione è del tipo (III); di essa sappiamo dunque costruire, applicando il teorema di Eulero, l'integrale generale.

Costruito questo integrale, se si risolve rispetto a $p(x)$ l'equazione (di tipo integrale) $f(\xi) = \Psi' | [p(x) \xi] |$ e si sostituisce nella (B) a p la sua espressione in funzione di f , si ha l'integrale generale della (V).

6. Si può anche ricondurre alla (II) (in cui sia posto $r=1$) ogni equazione del tipo:

$$(VI) \quad \int_0^1 F' | [\varphi(x) \xi] | \Theta | [\varphi(x) \xi] | d\xi = \Psi | [\varphi(x)] | F | [\varphi(x)] |.$$

(F funzione incognita senza punti eccezionali; Θ, Ψ funzioni note) quando di essa si conosca un'infinità continua d'integrali, ossia un integrale contenente un parametro che possa assumere tutti i valori compresi, per es., nell'intervallo 01.

Se $F_0 | [\varphi(x) \eta] |$ è il detto integrale, basta porre:

$$(VII) \quad f(\eta) = F_0 | [\varphi(x) \eta] |.$$

La più generale funzione omogenea di primo grado, e senza punti eccezionali, dipendente da tutti i valori di $f(\eta)$ nell'intervallo 01 ci dà dunque, tenendo conto della (VII), l'integrale generale della (VI),

Questo risultato corrisponde all'altro, valido per le funzioni di n variabili: noti n integrali particolari di un'equazione alle derivate parziali del primo ordine, lineare ed omogenea rispetto alla funzione incognita e alle sue derivate, l'integrale generale è dato da un'arbitraria funzione omogenea di primo grado di quei n integrali.

Matematica. — *Sulle equazioni integrali*. Nota del dott. LUCIANO ORLANDO, presentata del Corrispondente A. DI LEGGE.

Sia

$$(1) \quad \varphi(x) = F(x) + \int_0^x [p_1(x) q_1(\xi) + p_2(x) q_2(\xi) + \dots + p_n(x) q_n(\xi)] \varphi(\xi) d\xi$$

un'equazione integrale del tipo di Volterra; la funzione φ è incognita, e le altre sono funzioni note.

Noi vogliamo qui far vedere come si possa risolvere quest'equazione, adoperando un mio metodo, che ho largamente applicato, in numerosi altri miei lavori, alle equazioni del tipo di Fredholm.

Supponiamo di voler esplorare le vicinanze di un punto regolare a , e che Φ sia un numero positivo non superato da $|\varphi|$ in tali vicinanze.

Scriviamo l'equazione (1) come segue:

$$(2) \quad \varphi(x) = F(x) + \int_0^a [p_1(x) q_1(\xi) + \dots + p_n(x) q_n(\xi)] \varphi(\xi) d\xi + \int_a^x [p_1(x) q_1(\xi) + \dots + p_n(x) q_n(\xi)] \varphi(\xi) d\xi.$$

Se poniamo

$$(3) \quad m_v = \int_0^a q_v(\xi) \varphi(\xi) d\xi,$$

dove v rappresenta i numeri $1, 2, \dots, n$, e chiamiamo $K(x, \xi)$ il nucleo $p_1(x) q_1(\xi) + p_2(x) q_2(\xi) + \dots + p_n(x) q_n(\xi)$, noi potremo scrivere

$$(4) \quad \varphi(x) = p_1(x) m_1 + p_2(x) m_2 + \dots + p_n(x) m_n + \int_a^x K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Le costanti m_v sono incognite.

Ed ora, secondo il metodo d'approssimazioni successive, al quale ho prima alluso, scriviamo

$$\begin{aligned} \varphi + \varepsilon_1 &= F + \sum p m & \varphi + \varepsilon_2 &= F + \sum p m + \int_a^x K \cdot (\varphi + \varepsilon_1) d\xi \\ \varphi + \varepsilon_3 &= F + \sum p m + \int_a^x K \cdot (\varphi + \varepsilon_2) d\xi, \dots \end{aligned}$$

Noi verremo così a fare i successivi errori

$$\varepsilon_1 = - \int_a^\infty K \varphi d\xi \quad , \quad \varepsilon_2 = \int_a^\infty K \varepsilon_1 d\xi \quad , \quad \varepsilon_3 = \int_a^\infty K \varepsilon_2 d\xi \quad , \dots$$

Se riteniamo fissato un numero positivo ϱ , tale da superare $|K|$ nelle vicinanze di a , e chiamiamo M il numero positivo fisso $\varrho \Phi$, allora noi sceglieremo l'ampiezza (a, x) tale, per esempio, da non superare $0,1 M$; e perverremo ad una serie convergentissima, che esprimerà φ contenendo linearmente le incognite m_v . La (3) ci darà allora il modo di avere n equazioni di primo grado fra le n incognite m_v ; queste si potranno ricavare da tale sistema.

Il metodo si estende agevolmente al caso che il nucleo non sia

$$p_1(x) q_1(\xi) + p_2(x) q_2(\xi) + \dots + p_n(x) q_n(\xi) \quad ,$$

ma ne differisca per una funzione $\theta(x, \xi)$, la quale oscilli in limiti sufficientemente ristretti.

Lo svolgimento di ciò che qui abbiamo molto sinteticamente esposto, e l'estensione a casi alquanto più generali di quelli consentiti dalle nostre implicite ipotesi, costituiscono un facile lavoro, sul quale non vogliamo insistere. Mi preme soltanto stabilire che il mio metodo si estende benissimo anche alle equazioni con limiti variabili, e conduce ad una serie di agevole algoritmo, e convergente con rapidità che si può subito prestabilire.

Matematica. — *Sopra un'operazione funzionale atta a trasformare i potenziali logaritmici in simmetrici.* Nota della signorina LINA BIANCHINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Fra i potenziali binari (quelli cioè che si possono far dipendere da due sole coordinate) i logaritmici occupano un posto speciale, per le molteplici e semplici applicazioni di cui sono suscettibili, in quanto vi si può impiegare il metodo delle funzioni di variabile complessa, e trar partito dall'agile sussidio della rappresentazione conforme.

Per gli altri tipi, in particolare pei potenziali simmetrici, che sono altrettanto e forse più importanti dal punto di vista applicativo, pur potendosi definire le funzioni associate, come nel caso logaritmico, manca un analogo sussidio, onde è assai più ristretta la categoria di questioni che, per essi, si sanno risolvere in modo esauriente.

Stando così le cose, si presenta interessante indagare il legame fra le dette due specie di potenziali, nella mira di valersene per trasportare ai potenziali simmetrici alcuni dei risultati già conseguiti pei logaritmici.

In due Note (la presente e un'altra che le farà tosto seguito) sorte da un suggerimento del prof. Levi-Civita, mi propongo di far vedere come vi sia corrispondenza biunivoca fra le coppie (reali e regolari) di funzioni associate simmetriche (u, v) e le coppie (pure reali) di funzioni associate logaritmiche (φ, ψ) , vincolate alla condizione $\psi = 0$ sulla retta, che è asse di simmetria per (u, v) .

In altri termini ogni funzione di variabile complessa $\varphi + i\psi$, reale sull'asse reale, dà luogo ad una coppia (u, v) , e reciprocamente.

L'espressione analitica di tale corrispondenza (funzionale lineare) è fornita da integrali definiti semplici, e invertibili in modo semplice, mercè il teorema di Abel. A ciò si perviene combinando opportunamente la formula di Whittaker, che dà l'integrale generale dell'equazione di Laplace ⁽¹⁾, con altre già rilevate dal Beltrami ⁽²⁾. Immediato corollario della corrispondenza funzionale, ora ora specificata, è l'esistenza, per i potenziali simmetrici, di un gruppo di trasformazioni che ha la stessa generalità del gruppo conforme. La sua natura funzionale ne rende però assai meno efficace l'impiego di quel che non avvenga nel caso logaritmico. Per la stessa ragione i problemi al contorno, relativi ad una specie di potenziali, non si trasformano, almeno in generale, per effetto delle formule di corrispondenza, in problemi analoghi relativi all'altra specie. Così l'obbiettivo, di portare, mediante trasformazioni, la teoria dei potenziali simmetrici allo stesso grado di sviluppo consentito dai logaritmici, non sarà completamente raggiunto, ma qualche caso, come, ad es., il problema del disco, di cui mi occuperò in Note successive, offrirà una facile e vantaggiosa applicazione.

1. — RICHIAMO E NUOVA DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA DI WHITTAKER.

La più generale soluzione (regolare in un certo campo S) dell'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

può essere rappresentata con una espressione del tipo

$$(1) \quad u = \int_0^{2\pi} f(z + ix \cos \lambda + iy \sin \lambda, \lambda) d\lambda = \int_0^{2\pi} f(l, \lambda) d\lambda,$$

⁽¹⁾ Whittaker, *On the partial differential equations of math. physics*, Mathematische Annalen, 57 Band, 1903.

⁽²⁾ Beltrami, Opere matematiche, tomo 3°, *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche*. E ibid., *Intorno ad un teorema di Abel e ad alcune sue applicazioni*. Debbo notare che già il prof. Burgatti nella sua Nota, *Sui potenziali binarii* (Rend. della R. Accad. di Bologna, 1909), aveva ricavato un'espressione dei potenziali simmetrici dalla formula di Whittaker, senza però trattare la questione che forma oggetto del presente scritto.

dove f è una funzione generica dei due argomenti

$$l = z + ix \cos \lambda + iy \sin \lambda \quad \text{e} \quad \lambda,$$

periodica rispetto a λ col periodo 2π e regolare per valori reali di λ .

La dimostrazione di questo importante risultato può darsi, in modo alquanto diverso da quello indicato da Whittaker, ricorrendo alla rappresentazione di una qualsivoglia funzione armonica u , regolare entro un campo S , mediante la formula

$$(2) \quad u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left(u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{du}{dn} \frac{1}{r} \right) d\sigma,$$

dove σ designa il contorno di S , n la sua normale in un punto generico ξ, η, ζ del contorno stesso, ed r la distanza fra il punto potenziato (x, y, z) , e il punto potenziante (ξ, η, ζ) .

Basta all'uopo osservare con Whittaker che si ha identicamente:

$$(3) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{l - A},$$

dove, come s'è detto,

$$l = z + ix \cos \lambda + iy \sin \lambda;$$

e

$$A = \zeta + i\xi \cos \lambda + i\eta \sin \lambda,$$

talchè in primo luogo il potenziale elementare $\frac{1}{r}$ rimane effettivamente definito dalla (1), prendendovi per f

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l - A}.$$

Ne consegue, chiamando α, β, γ i coseni direttori della normale n ,

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \alpha + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} \beta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \gamma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{i\alpha \cos \lambda + i\beta \sin \lambda + \gamma}{(l - A)^2} d\lambda.$$

Tale derivata risulta pure nel tipo (1), essendo

$$f = f_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{i\alpha \cos \lambda + i\beta \sin \lambda + \gamma}{(l - A)^2}.$$

Sostituendo nella (2) in luogo di $\frac{d}{dn}$ e di $\frac{1}{r}$ i loro valori, e invertendo le integrazioni rispetto a λ e a σ , risulta senz'altro che, per la u generica, si ha

$$f = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left(u f_2 - \frac{du}{dn} f_1 \right) d\sigma,$$

quindi essa è rappresentabile sotto la forma (1),

c. d. d.

2. — COROLLARIO RELATIVO AI POTENZIALI SIMMETRICI.

La dimostrazione testè esposta ha il vantaggio di fornire, con metodo analogo, anche la più generale espressione di un potenziale simmetrico, attorno all'asse delle z , sotto la forma

$$(4) \quad u = \int_0^{2\pi} f(z + ix \cos \lambda + iy \sin \lambda) d\lambda = \int_0^{2\pi} f(l) d\lambda,$$

che non differisce dalla (1) se non per il fatto che f va ritenuto indipendente da λ .

Per rendersene conto conviene riprendere la (2), nell'ipotesi che vi sia simmetria rispetto all'asse Oz : ben s'intende sia per il potenziale u , che per la superficie σ , entro la quale lo si suppone regolare.

Si indichi con s un generico meridiano di σ , con ds il relativo elemento (circostante al generico punto potenziente ξ, η, ζ) e si ponga

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \omega, & y &= \varrho \sin \omega, \\ \xi &= \varrho_1 \cos \omega_1, & \eta &= \varrho_1 \sin \omega_1. \end{aligned}$$

Manifestamente $u(x, y, z)$ dovrà risultare funzione dei soli argomenti ϱ e z ; e del pari $u(\xi, \eta, \zeta)$, $\frac{du}{dn}$ dipenderanno dai soli argomenti ϱ_1 e ζ .

Con ciò (essendo indipendente da ω_1 anche il simbolo di derivazione rapporto ad n), l'integrale che sta nel secondo membro della (2) potrà essere scritto:

$$(5) \quad \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} ds \left\{ u \frac{d}{dn} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} d\omega_1 - \frac{du}{dn} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} d\omega_1 \right\}.$$

Ora se nell' $\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} d\omega_1$ (potenziale d'una circonferenza omogenea) sostituiamo per $\frac{1}{r}$ il valore dato dalla (3), e invertiamo le integrazioni rispetto a λ e

ad ω_1 , si ha:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} d\omega_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{2\pi} \frac{d\omega_1}{l - A},$$

ove

$$A = \varrho_1 \{1 + i \cos(\omega_1 - \lambda)\}.$$

In luogo di ω_1 , assumiamo come variabile di integrazione $\tau = \omega_1 - \lambda$.
Verrà

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\omega_1}{l - A} = \int_{\lambda}^{2\pi + \lambda} \frac{d\tau}{l - \varrho_1(1 + i \cos \tau)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{l - \varrho_1(1 + i \cos \tau)},$$

da cui risulta che l' $\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} d\omega_1$, è rappresentabile sotto la forma (1) senza che f dipenda esplicitamente da λ . Se ne inferisce che anche l'espressione (5) di u appartiene in definitiva allo stesso tipo (4),

c. d. d.

Rimane pertanto acquisito (posto, nella (4), $x = \varrho \cos \omega$, $y = \varrho \sin \omega$, e assunta $\lambda - \omega = \vartheta$ al posto di λ come variabile corrente d' integrazione) che ogni potenziale simmetrico $u(z, \varrho)$ può porsi sotto la forma:

$$\int_0^{2\pi} f(z + i\varrho \cos \vartheta) d\vartheta.$$

Scrivendo materialmente x al posto di z , e y al posto di ϱ , con che, nel piano rappresentativo (x, y) , Ox funge da asse di simmetria, si ha per i potenziali in questione, cioè per un qualsiasi integrale regolare dell'equazione

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

l'espressione

$$u = \int_0^{2\pi} f(x + iy \cos \vartheta) d\vartheta.$$

L'integrale del secondo membro può essere ridotto all'intervallo $0, \pi$.
Infatti:

$$u = \int_0^{2\pi} f d\vartheta = \int_0^{\pi} f d\vartheta + \int_{\pi}^{2\pi} f(x + iy \cos \vartheta) d\vartheta,$$

e, posto nel secondo integrale $\vartheta' = 2\pi - \vartheta$, è

$$u = \int_0^{\pi} f d\vartheta - \int_{\pi}^0 f(x + iy \cos \vartheta') d\vartheta'.$$

Ossia

$$u = \int_0^{\pi} f(x + iy \cos \vartheta) d\vartheta,$$

qualora s'indichi ancora con f la funzione, *a priori* arbitraria, $2f$.

3. — LA FUNZIONE CONIUGATA v .

Dalle equazioni di coniugio relative alle funzioni associate simmetriche

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = y \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -y \frac{\partial u}{\partial y}, \end{cases}$$

si ricava in primo luogo

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -i \int_0^\pi f' y \cos \vartheta d\vartheta,$$

f' designando la derivata di f rispetto al suo argomento $x + iy \cos \vartheta$.

Ne consegue

$$(6) \quad v = -i \int_0^\pi f y \cos \vartheta d\vartheta + Y,$$

dove Y è costante rispetto ad x , e quindi *a priori* una funzione della sola y . Vedremo ora che Y risulta costante anche rispetto ad y . Infatti, dalla (6) si ha

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -i \int_0^\pi f \cos \vartheta d\vartheta + \int_0^\pi y \cos^2 \vartheta f' d\vartheta + Y',$$

e siccome, per la prima equazione di coniugio,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \int_0^\pi y f' d\vartheta,$$

così (scrivendo $1 - \sin^2 \vartheta$ al posto di $\cos^2 \vartheta$) si ricava

$$-i \int_0^\pi f \cos \vartheta d\vartheta - \int_0^\pi y \sin^2 \vartheta f' d\vartheta + Y' = 0.$$

Ma

$$\begin{aligned} - \int_0^\pi y \sin^2 \vartheta f' d\vartheta &= -i \int_0^\pi \frac{df}{d\vartheta} \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= [-i f \sin \vartheta]_0^\pi + i \int_0^\pi f \cos \vartheta d\vartheta = i \int_0^\pi f \cos \vartheta d\vartheta, \end{aligned}$$

per conseguenza

$$Y' = 0,$$

c. d. d.

La costante additiva Y è inessenziale. Potremo quindi assumerla senz'altro eguale a zero, e avremo complessivamente le cercate espressioni funzionali d'ogni coppia di associate simmetriche sotto la forma:

$$(7) \quad \begin{cases} u = \int_0^\pi f(x + iy \cos \vartheta) d\vartheta, \\ v = -i \int_0^\pi f(x + iy \cos \vartheta) y \cos \vartheta d\vartheta. \end{cases}$$

Fisica matematica. — *Sulla distribuzione della massa nell'interno d'un corpo in corrispondenza a un'assegnata azione esterna.* Nota di CORRADINO MINEO, presentata dal Socio P. PIZZETTI.

1. Il chmo prof. Pizzetti, in una sua fondamentale Memoria *Intorno alle possibili distribuzioni della massa nell'interno della Terra* ⁽¹⁾, ha stabilito parecchi metodi per costruire corpi d'attrazione esterna nulla, relativi allo spazio τ limitato da una superficie chiusa S . Uno si fonda su questa semplicissima considerazione. Sia $f(x, y, z)$ una funzione continua in τ , insieme con le sue derivate prime, e dotata inoltre di derivate seconde atte all'integrazione in τ : allora condizione necessaria e sufficiente affinché la f sia la funzione potenziale *interna* d'un corpo situato dentro τ , che non esercita azione newtoniana all'esterno, è che essa si annulli insieme con la sua derivata normale in ogni punto del contorno S ; e la densità del corpo sarà data da $\Delta_2 f: -4\pi$.

In particolare, se

$$(1) \quad s = 0$$

è l'equazione della S , e u una funzione arbitraria dei punti di τ , saranno corpi d'attrazione esterna nulla quelli dentro τ la cui densità è espressa dalla funzione $\Delta_2(us^2)$ ⁽²⁾.

Nel caso che il corpo situato in τ eserciti un'azione esterna non nulla, il compianto prof. Lauricella — che anch'egli, dopo il Pizzetti, s'ebbe a occupare della questione — mostrò come, prestabilita l'azione esterna, si possa costruire la più generale funzione potenziale interna del corpo, e quindi la più generale densità, servendosi della seconda funzione del Green ⁽³⁾.

Ora noi vogliamo mostrare come, modificando in modo molto semplice la fondamentale considerazione del Pizzetti, si possano per altra via ottenere quante si vogliano distribuzioni della massa, corrispondenti a un'assegnata azione esterna non nulla.

⁽¹⁾ Annali di matematica pura ed applicata, tomo XVII, 1910, pp. 225-258.

⁽²⁾ Per un'estensione di questo risultato, vedi Crudeli, *I corpi d'attrazione nulla*, questi Rendiconti, vol. XXI, 1912, fasc. 7°. Noi qui ci limitiamo al caso che u e s sieno funzioni continue, insieme con le derivate prime, in tutto il dominio τ , compresa la frontiera S , e che inoltre ammettano derivate seconde atte all'integrazione in τ .

⁽³⁾ Lauricella, *Sulla funzione potenziale di spazio corrispondente ad una assegnata azione esterna*, questi Rendiconti, vol. XX, 1911, fasc. 2°.

2. Sia

$$(2) \quad r = MP$$

la distanza tra un punto qualunque M della S e un punto P del dominio τ (non esclusa la frontiera). Sia sempre (1) l'equazione della S e u una funzione dei punti di τ . Applicando alla funzione us la seconda formola del Green, risulta facilmente

$$(3) \quad \int_{\tau} \frac{\Delta_z(us)}{r} d\tau = \int_S \left(us \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{d}{dn} (us) \right) dS.$$

dove il verso positivo della normale è quello della semiretta penetrante in τ . Ma sulla S è $us = 0$; poi potremo supporre (cambiando eventualmente di segno la s) che i coseni della fissata direzione positiva della normale siano dati da

$$(4) \quad \cos \widehat{ns} = \frac{-1}{\sqrt{\Delta_1 s}} \frac{\partial s}{\partial x}, \quad \cos \widehat{ny} = \frac{-1}{\sqrt{\Delta_1 s}} \frac{\partial s}{\partial y}, \quad \cos \widehat{nz} = \frac{-1}{\sqrt{\Delta_1 s}} \frac{\partial s}{\partial z},$$

ritenendo presa la determinazione positiva del radicale ed essendo

$$(5) \quad \Delta_1 s = \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial z} \right)^2.$$

Allora la (3) si scrive

$$(6) \quad \int_{\tau} \frac{\Delta_z(us)}{r} d\tau = \int_S \frac{u \sqrt{\Delta_1 s}}{r} dS.$$

Questa mostra che *una massa distribuita in τ con densità $\Delta_z(us)$ esercita la stessa azione esterna che se distesa in semplice strato sul contorno S con densità $u \sqrt{\Delta_1 s}$.*

Nota dunque in superficie la funzione potenziale V del corpo, cioè nota la sua azione esterna, se riusciamo a risolvere l'equazione integrale di prima specie del tipo Fredholm

$$(7) \quad \int_S \frac{\varrho(P)}{r} dS = V(M),$$

avremo la densità ϱ del semplice strato superficiale, che esercita l'assegnata azione esterna; poi, posto

$$(8) \quad u_s = \frac{\varrho}{\sqrt{\Delta_1 s}},$$

non avremo che a prolungare in τ , con legge qualunque, la funzione u_s dei punti della S : se u è un tal prolungamento, cioè una funzione continua dei punti di τ , che sul contorno coincide con u_s , allora

$$(9) \quad h = \Delta_s(us)$$

è la densità d'un corpo situato in τ , che esercita l'assegnata azione esterna.

3. La questione è dunque ricondotta a risolvere l'equazione integrale (7). Poniamo

$$(10) \quad W(M) = \int_s \frac{\varrho(P)}{r} dS,$$

dove intenderemo ora che M sia un punto qualunque dello spazio, e P un punto variabile della S . Distingueremo, poi, al solito, con l'indice e i valori d'una funzione in punti esterni alla S ; con l'indice i , i valori della funzione in punti interni della S . Essendo V la funzione potenziale del nostro corpo, dalle (7) e (10) segue subito

$$(11) \quad W_e = V_e.$$

Per le note proprietà delle funzioni potenziali di semplice strato, abbiamo

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{dW_e}{dn} - \frac{dW_i}{dn} = 4\pi\varrho(M), \\ \frac{dW_e}{dn} + \frac{dW_i}{dn} = 2 \int_s \varrho(P) \frac{\cos \psi}{r^2} dS; \end{cases}$$

dove M è un determinato punto della S , nel quale s'intendono calcolate le due derivate normali, e ψ è l'angolo della retta MP con la seminormale positiva (n. 2) in M alla S . Dalle (11) e (12) segue

$$(13) \quad \frac{dV_e}{dn} = 2\pi\varrho(M) + \int_s \varrho(P) \frac{\cos \psi}{r^2} dS.$$

Se dunque si suppone nota l'azione esterna del corpo, e quindi la derivata normale $\frac{dV_e}{dn}$, la ricerca di ϱ si può anco far dipendere dalla (13), vale a dire da un'equazione integrale di Fredholm di seconda specie. Essa ammette sempre un'unica soluzione continua, giacchè l'equazione omogenea relativa, per le note proprietà delle funzioni potenziali, non può ammettere che la soluzione identicamente nulla. E la soluzione di (13) è soluzione di (7): anzi ne è l'unica, giacchè il nucleo della (7) è chiuso.

4. Notiamo due casi particolari semplicissimi.

Se la S è di livello per il corpo, allora, essendo M un punto qualunque di S , è

$$W(M) = V(M) = \text{costante},$$

e quindi W è pure costante (perchè armonica in τ); sicchè dalla prima delle (12) segue subito, badando alla (11):

$$\varrho(M) = \frac{1}{4\pi} \frac{dV_e}{dn},$$

come è risaputo.

5. Supponiamo in secondo luogo che la S sia una sfera di raggio a col centro nell'origine delle coordinate. Allora

$$\cos \psi = \frac{r}{2a},$$

e la (13) diviene

$$\frac{dV_e}{dn} = 2\pi\varrho + \frac{V_s}{2a},$$

che non è altro se non l'equazione di Lagrangia. Se ne deduce

$$(14) \quad \varrho = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{dV_e}{dn} - \frac{V_s}{2a} \right);$$

sicchè il nostro problema è per la sfera interamente risoluto.

6. Ma possiamo anco risolvere col nostro metodo un caso importante per la Geodesia, già altrimenti risoluto dal prof. Pizzetti; cioè quello d'un pianeta, che ammetta come *superficie d'equilibrio* esteriore un ellissoide a tre assi d'equazione

$$(15) \quad s = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

7. sia inoltre dotato d'un moto rotatorio uniforme, di velocità angolare ω , intorno a uno dei tre assi, per es. intorno all'asse z , e abbia una massa totale M conosciuta. In questo caso, infatti, si deve avere in superficie

$$(16) \quad fV_s + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = C,$$

dove f è la costante dell'attrazione, e C un'altra costante, che, per le ipotesi fatte, resta univocamente determinata (teorema di Stokes). Ne segue che la risoluzione della (7) è ridotta in questo caso a quella d'un doppio problema di Dirichlet, esterno e interno, rispetto all'ellissoide (15): cioè alla ricerca di due funzioni armoniche W_e e W_i , la prima all'esterno, e la seconda all'interno dell'ellissoide, e che in superficie si riducano a

$$\frac{1}{f} \left(C - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \right);$$

dopo di che, la prima delle (12) dà ϱ , e si può applicare il procedimento del n. 2.

Questo doppio problema si risolve elegantemente per mezzo delle funzioni armoniche ellissoidali del Morera ⁽¹⁾.

Allora la funzione W_e è quella già costruita dal Pizzetti, cioè

$$(17) \quad W_e = V_e = \frac{M}{2} K + k_1 v_1 + k_2 v_2,$$

essendo K, v_1, v_2 tre determinate funzioni armoniche nello spazio esterno all'ellissoide, e k_1, k_2 due certe costanti ⁽²⁾.

Quanto alla W_i , essa è data dalla formola

$$(18) \quad W_i = \frac{M}{2} K^{(0)} + k_1 v_1^{(0)} + k_2 v_2^{(0)} + \varepsilon [v_1^{(0)} + v_2^{(0)} + v_3^{(0)}],$$

dove $K^{(0)}, v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, v_3^{(0)}$ sono quel che diventano K, v_1, v_2 e l'analoga v_3 , quando in esse, invece della maggior radice della nota equazione cubica, si metta lo zero; mentre la costante ε è data così

$$(19) \quad \varepsilon = \frac{-c^2(k_1 b^2 + k_2 a^2)}{b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2}.$$

Se si calcola ora la differenza delle derivate normali delle due funzioni (17) e (18) e si bada alla prima delle (12), si ottiene senza difficoltà

$$(20) \quad \varrho = \frac{1}{4\pi abc} \left\{ \left(M - 4k_1 \frac{x^2}{a^4} - 4k_2 \frac{y^2}{b^4} \right) p - \frac{4\varepsilon}{p} \right\},$$

essendo p la distanza dal centro del piano tangente all'ellissoide in un suo punto.

La (8) diventa nel caso della (15):

$$(21) \quad u_s = \frac{1}{8\pi abc} \left\{ \left(M - 4k_1 \frac{x^2}{a^4} - 4k_2 \frac{y^2}{b^4} \right) p^2 - 4\varepsilon \right\}.$$

Si tratta ora di prolungare la u_s all'interno dell'ellissoide. Per avere

⁽¹⁾ Vedi Morera, *Alcune considerazioni relative alla Nota del prof. Pizzetti* ecc., questi Rendiconti, vol. III, 1894, fasc. 8°; e per una teoria autonoma di queste importanti funzioni del Morera, vedi una Nota del prof. Somigliana, nel *Circ. mat. di Palermo*, tom. XXXI, 1911, fasc. 3°.

⁽²⁾ Cfr. Pizzetti, *Principii della teoria meccanica della figura dei pianeti*. Pisa, Spoerri, 1913, pp. 69-71.

densità spaziali finite in tutto τ , notiamo che p^2 , tenuto conto della (15), si può scrivere così

$$(22) \quad p^2 = \frac{a^4 b^4 c^2}{a^4 b^4 - (a^2 - c^2) b^4 x^2 - (b^2 - c^2) a^4 y^2},$$

e questa è una funzione continua in tutto τ .

Si può allora prendere in τ :

$$(23) \quad u_1 = \frac{1}{2\pi abc} \left(\frac{p^2}{4} D - \varepsilon \right),$$

essendo

$$(24) \quad D = M - 4 \left(k_1 \frac{x^2}{a^4} + k_2 \frac{y^2}{b^4} \right).$$

In conseguenza si potrà avere una distribuzione di massa nell'interno dell'ellissoide — e quindi infinite (n. 1) — compatibilmente all'assegnata azione esterna, prendendo come densità la funzione $h_1 = \Delta^2(u_1 s)$. Si trova

$$(25) \quad \begin{aligned} \pi abc h_1 = & \left(\frac{D}{4} p^2 - \varepsilon \right) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) - 4p^2 \left(\frac{k_1 x^2}{a^6} + \frac{k_2 y^2}{b^6} \right) + \\ & + Dp^4 \left(\frac{\alpha x^2}{a^6} + \frac{\beta y^2}{b^6} \right) - p^2 s \left(\frac{k_1}{a^4} + \frac{k_2}{b^4} \right) - 4p^4 s \left(\frac{k_1 \alpha x^2}{a^8} + \frac{k_2 \beta y^2}{b^8} \right) + \\ & + \frac{Dp^4 s}{4} \left(\frac{\alpha}{a^4} + \frac{\beta}{b^4} \right) + Dp^6 s \left(\frac{\alpha^2 x^2}{a^8} + \frac{\beta^2 y^2}{b^8} \right), \end{aligned}$$

essendo

$$(26) \quad \alpha = \frac{a^2 - c^2}{c^2}, \quad \beta = \frac{b^2 - c^2}{c^2}.$$

Se l'ellissoide è di rotazione intorno a z , non c'è che da fare $a = b$ e $k_1 = k_2$; la V_e , data dalla (17), si riduce a quella calcolata dal prof. Pizzetti; la legge di distribuzione della massa, in questo caso, è abbastanza semplice, ecc. Il caso della sfera si ottiene facendo, in tutte le formole, $a = b = c$: peraltro si ottiene più immediatamente partendo dalla (14) del n. 5.

Fisica. — *Sulla variazione di resistenza del bismuto nel campo magnetico* ⁽¹⁾. Nota di G. C. TRABACCHI, presentata dal Socio P. BLASERNA.

La variazione di resistenza che alcuni metalli subiscono nel campo magnetico assume, come è noto, un valore assai rilevante per il bismuto, cosicchè se ne trae vantaggio per la misura della intensità dei campi come fu proposto da Lenard.

Sulle cause di questa variazione di resistenza, che la teoria elettronica non permette di spiegare, regna ancora grande oscurità ed assumono perciò un certo interesse tutti i fatti che possono portare un po' di luce sull'argomento.

Se si prendono in esame i risultati dei vari sperimentatori che hanno determinato la variazione di resistenza del bismuto nel campo magnetico si riscontra che per uno stesso campo i valori trovati sono discordi; poichè per i vari campioni sperimentati era costante il grado di purezza, la discordanza dei risultati dipende evidentemente dal modo di preparazione: è infatti nota la grande influenza del regime di raffreddamento sulla struttura del bismuto.

È inoltre degno di nota, come ho trovato Patterson ⁽²⁾, che la variazione di resistenza è assai piccola per le lamine infinitamente sottili che possono essere ottenute coi depositi dati dai raggi catodici. Questi fatti fanno pensare ad una relazione fra il fenomeno e la struttura del metallo.

Questa ipotesi è avvalorata dai risultati delle esperienze che mi accingo a descrivere.

Ho preso del bismuto puro fornito da C. A. F. Kahlbaum; l'ho ridotto, con mezzi meccanici, in polvere sottilissima, e quindi ne ho fatta una lamina comprimendo la polvere in un apposito stampo costruito in modo analogo alle ordinarie macchine da pastiglie; le dimensioni erano però più grandi delle ordinarie e la pressione rilevatissima essendo esercitata da una robusta pressa.

Una lamina così ottenuta presenta un aspetto esterno molto simile a quello del bismuto fuso; anche le sue proprietà meccaniche differiscono di poco: la resistenza specifica elettrica è di poco superiore.

La struttura interna però di queste lamine è certo assai differente da quella del bismuto fuso, perchè mancano assolutamente i grossi cristalli.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Roma.

⁽²⁾ Cambr. Proc. (2) 9, 118 (1901).

La misura della resistenza è stata fatta col metodo già adoperato in altre esperienze analoghe eseguite con il prof. Corbino ⁽¹⁾. In due punti della lamina erano applicati due elettrodi puntiformi che funzionavano da adduttori della corrente e nelle loro vicinanze due elettrodi sonde per la esplorazione di potenziali, disponendoli in posizione tale da rendere trascurabile la differenza di potenziale per effetto Hall.

Allo scopo di eliminare completamente l'influenza di quest'ultimo veniva preso come valore della differenza di potenziale fra le sonde la media dei valori, poco differenti, ottenuti col campo diretto e col campo invertito. In tal modo la variazione di resistenza, che si deduce dalla variazione di differenza di potenziale osservata, è del tutto dovuta alla variazione delle proprietà specifiche del bismuto sotto l'azione del campo. Essendomi messo in condizione di evitare tutte le possibili cause di errore ho proceduto alla misura del rapporto fra la resistenza specifica del bismuto col campo a quella senza campo, prendendo come termine di confronto una lamina di bismuto fuso della stessa qualità di quello usato per preparare la polvere.

Le lamine avevano tutte le stesse dimensioni e cioè erano dei dischi dello spessore di mm. 1,8 e del diametro di mm. 20.

Chiamando con r la resistenza specifica della lamina nel campo ed r_0 quella fuori, ho trovato i seguenti risultati:

	Campo U. C. G. S.	$\frac{r}{r_0}$
Bismuto fuso	5400	1,20
Bismuto in polvere compresso	5400	1,04

Come si vede la variazione di resistenza si riduce per queste lamine di polveri compresse ad un valore assai piccolo.

Ho in seguito sperimentato delle lamine di polvere di bismuto compresso ottenute in modo del tutto analogo a quelle precedentemente descritte, ma usando della polvere preparata riducendo con mezzi chimici un sale di bismuto.

La polvere sottilissima così ottenuta ben lavata ed asciugata con cura mi ha permesso d'ottenere delle lamine di aspetto analogo alle precedenti, ma solo un po' più fragili.

La struttura interna era però molto più fine.

Per tali lamine la variazione di resistenza per campi anche di 10,000 unità C. G. S. è praticamente nulla.

Ho voluto poi studiare per le stesse lamine un fenomeno che non pare, nella sua parte più essenziale, legato alla struttura grossolana del metallo;

(¹) Rend. R. Accad. Lincei, XXIV, pag. 806.

ho perciò determinato per esse la costante dell'effetto Hall. Per questo scopo mi sono servito della solita disposizione con i quattro elettrodi puntiformi, prendendo le dovute precauzioni, per evitare le cause di errore che così fortemente possono influire sulla determinazione quantitativa di detta costante.

Ho sperimentato insieme con le lamine di polveri compresse la lamina di bismuto fuso ed ho trovato *valori uguali per tutte* se si escludono delle piccole divergenze che possono essere giustificate da inevitabili errori di osservazione. I valori ottenuti per le lamine di polveri compresse, sono in ogni caso nei limiti di quelli trovati per la costante dell'effetto Hall per il bismuto fuso dai varî sperimentatori.

Si può concludere che, poichè una lamina di bismuto fuso, che presenta insieme l'effetto Hall e la variazione di resistenza nel campo, polverizzata e ricomposta per compressione conserva inalterato il primo effetto e perde il secondo, non pare vi sia relazione alcuna fra i due effetti.

Ciò spiega perchè la teoria che dà ragione dell'effetto Hall ed analoghi, non lascia prevedere la variazione di resistenza dei metalli nel campo magnetico che apparisce forse dipendente da alterazioni transitorie prodotte dal campo sulla struttura dei metalli stessi.

Fisica. — *Sull'attrito interno del nickel in campo magnetico variabile.* Nota preliminare del prof. ERNESTO DRAGO, presentata dal Corrispondente A. BATTELLI.

Fisica. — *Determinazione indiretta dello spettro solare.* Nota del prof. A. AMERIO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica-fisica. — *Determinazione sperimentale delle costanti critiche dell'azoto, dell'ossido di carbonio, dell'ossigeno, e del metano* ⁽¹⁾. Nota di ETTORE CARDOSO, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

1. Ho già pubblicato i risultati sperimentali delle mie ricerche sullo stato critico d'una diecina di gas le cui temperature critiche erano comprese fra $+9^{\circ}$ e $+157^{\circ}$ ⁽²⁾. Lo scopo di queste misure è di riunire il più grande numero di dati precisi assolutamente indispensabili per lo studio dell'equazione di stato dei fluidi reali. Allargando il campo delle mie investigazioni fui portato a studiare i gas comunemente chiamati permanenti.

Questi gas, che sono stati poco o mai studiati (forse a causa delle difficoltà sperimentali che si presentano nel loro studio) offrono fra varie particolarità quella interessantissima, al punto di vista dello studio degli stati corrispondenti, di dare delle temperature ridotte, i cui valori decrescono rapidamente a una piccola distanza dal punto critico.

2. La più grossa difficoltà da superare nello studio delle costanti critiche dei gas dei quali mi sono occupato, risiede nella costruzione di un criostato semplice e preciso, capace di mantenere costante la temperatura a $0^{\circ}10$ (o ciò che è ancor meglio a $0^{\circ}05$) fra -80° et -160° . Ho trovato una soluzione di questo problema senza ricorrere all'ebullizione dei gas sotto pressione ridotta, perchè questo metodo, che può essere molto preciso ⁽³⁾, è in ogni caso di prezzo elevatissimo e richiede un personale tecnico. Ho dato altrove ⁽⁴⁾ una descrizione molto sommaria del criostato semplicissimo che ho costruito e che ha corrisposto perfettamente allo scopo per il quale fu studiato. Questo apparecchio è stato alquanto perfezionato e ne darò una descrizione molto completa a tempo debito.

3. La temperatura era misurata per mezzo di un termometro di vetro duro francese graduato da Baudin e riempito da me con dell'isopentano purissimo che debbo alla cortesia del mio amico prof. J. Timmermans di Bruxelles.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di fisica della Università di Ginevra, maggio 1913-ottobre 1914.

⁽²⁾ J. chim. phys. (1912), X, 479.

⁽³⁾ Esistono, a mia conoscenza, solo due o tre di questi impianti. Il più perfetto e più completo di essi è quello giustamente celebre dell'Università di Leida che ha permesso al suo ideatore prof. Kammerlingh-Onnes di realizzare le temperature più basse possibili nello stato attuale delle nostre conoscenze.

⁽⁴⁾ Archives des. Sc. phys. et nat. (1913), XXXVI, 97.

Lo studio di questo strumento mi ha dimostrato che prendendo certe precauzioni forniva dei risultati sicuri e precisi; senza voler insistere per adesso sulla questione dei termometri dirò soltanto che dovetti ricorrere al suddetto apparecchio perchè i termometri di Baudin, che danno sempre degli ottimi risultati, non davano più risultati sicuri nelle mie condizioni sperimentali.

4. Gli apparecchi di compressione e di misura delle pressioni erano, salvo qualche leggera variante, gli stessi che utilizzai nelle nostre precedenti ricerche sui gas facilmente coercibili (¹). Il tubo laboratorio però, invece di essere dritto, era ricurvo due volte ad angolo retto in modo da pescare nel criostato.

5. Il controllo della purezza dei campioni di gas era fatto per compressione isoterma, facendo variare largamente il volume rispettivo delle due fasi. Ho considerato il campione puro quando la differenza di pressione fra il principio e la fine della liquefazione non sorpassava 0,05 atmosfere.

6. Coi suddetti metodi di ricerca ho determinato la temperatura e la pressione critica dei quattro gas seguenti. I risultati pubblicati qui sotto (arrotondati a 0.05 atmosfere e 0°05) (²) sono la media di numerose misure concordanti.

Gas	pressione critica (atmosfere)	temperatura critica (centigrada)
N ₂	33,65	— 144,7
CO	34,60	— 138,7
O ₂	49,30	— 118,0
CH ₄	45,60	— 82,85

In una Memoria generale che pubblicherò prossimamente farò conoscere tutti i particolari sperimentali e descriverò altresì certe prove, rimaste senza risultato, fatte collo scopo di provocare il fenomeno dell'opalescenza critica coi gas studiati.

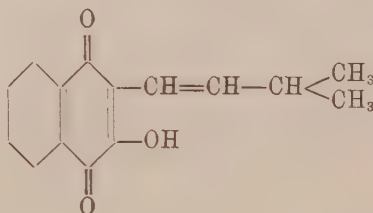
(¹) J. chim. phys., loc. cit.

(²) Lo scarto si è mantenuto sempre inferiore a questo valore nelle mie esperienze; qualche volta non arrivava a $\frac{1}{100}$ di atmosfera.

Chimica. — *Sopra alcuni derivati dell'acido lapacico* ⁽¹⁾.
Nota di LYDIA MONTI, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

L'acido lapacico è una sostanza gialla, contenuta nel legno di lapacho o taigu (una bigoniacea che cresce nel sud-America) ed in altre varietà di legni.

Il prof. Paternò ⁽²⁾, nel 1882, determinò la sua composizione, che trovò corrispondente alla formula $C_{15}H_{14}O_3$, ed in seguito ad un accurato studio gli attribuì la formula di costituzione seguente:



I

Su questo acido, e sopra alcuni dei suoi derivati, ho fatto alcune esperienze di riduzione, che descrivo in questa Nota.

L'acido lapacico, d'accordo con la formula sopra scritta, in soluzione alcoolica, in presenza di nero di Pd, addiziona due atomi di idrogeno, trasformandosi nel corrispondente idrochinone scolorato, il quale, in contatto dell'ossigeno dell'aria, subito si riossida per dare il chinone corrispondente (acido lapacico). In queste condizioni, il doppio legame della catena amilenica non viene idrogenato, probabilmente per l'influenza negativa che esercita l'ossidrile fenico.

Quando questo ossidrile è eterificato, come nel *monoacetil-derivato*, allora viene assorbita una quantità di idrogeno, corrispondente a quattro atomi per $C_{17}H_{16}O_4$. Due atomi di idrogeno trasformano la catena amilenica in catena amilica; due, invece, riducono il chinone in idrochinone e vengono perduti di nuovo, quando il prodotto di riduzione viene a contatto dell'aria. Infatti, il prodotto, che si può isolare dopo l'idrogenazione, è una sostanza cristallina di color giallo canario fusibile a 74-75°, la quale, dis-

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.

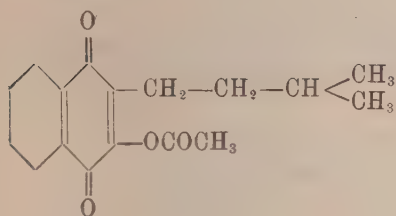
⁽²⁾ Paternò, Gazz. ch. ital., 12, 337 (1882).

seccata nel vuoto, ha dato all'analisi risultati concordanti con la formula di un biidroderivato.

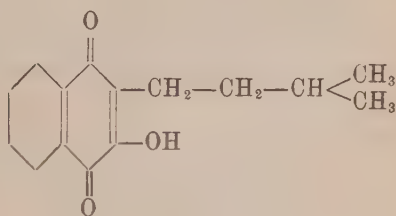
Sostanza g. 0,3033:	CO ² g. 0,7945;	H ₂ O g. 0,1692
Donde % trovato	C 71,44	H 6,20
C ₁₇ H ₁₈ O ₄ calcolato	C 71,33	H 6,29

Questo prodotto di riduzione è un chinone; in presenza di nero di Pd, assorbe a sua volta due atomi di idrogeno, che perde poi subito all'aria.

A questa sostanza si dovrà dunque attribuire la formula di costituzione (II)



II



III

Il prodotto che si ottiene saponificandola, con soluzione acquosa di idrato potassico, è un acido *biidrolapacico* della formula (III). Purificato per cristallizzazione dall'alcool diluito, si presenta in magnifici aghetti gialli fusibili a 87-89°. All'analisi dà i seguenti risultati:

Sostanza g. 0,2145:	CO ₂ g. 0,5802;	H ₂ O g. 0,1265.
Donde % trovato	C 73,77	H 6,60
C ₁₅ H ₁₆ O ₃ calcolato	C 73,77	H 6,55

Altri prodotti di riduzione ho ottenuti sottoponendo alla riduzione acetilante l'acido lapacico e il suo derivato monoacetilico.

Riscaldando a ricadere, con una piccola fiamma, l'acido lapacico (g. 1) sciolto in anidride acetica (cc. 20) con polvere di zinco (g. 10), la soluzione, colorata intensamente in giallo, in pochi minuti si decolora completamente. Si filtra e si decompone con acqua il filtrato; si deposita così una sostanza oleosa giallastra, che in breve solidifica. Questo prodotto, purificato per cristallizzazione dall'alcool bollente, si presenta in aghetti bianchi fusibili a 138-140°. All'analisi ha dato i seguenti risultati:

Sostanza g. 0,2407:	CO ₂ g. 0,6022;	H ₂ O g. 0,1272.
Donde % trovato	C 68,23	H 5,90
C ₂₁ H ₂₂ O ₆ calcolato	C 68,04	H 5,96

Questo prodotto, che ho potuto ottenere oosi facilmente con la riduzione acetilante è identico, in tutte le sue proprietà, al *triacetil-derivato dell'a-*

cido idrolapacico, che il prof. Paternò e Minunni⁽¹⁾ avevano preparato con tanta difficoltà, trattando con anidride acetica il prodotto ottenuto, per riduzione dell'acido lapacico con zinco e potassa, operando fuori del contatto dell'aria.

La medesima sostanza ho potuto ottenere ancora per riduzione acetilante dal monoacetil-derivato, operando nello stesso modo sopra descritto.

È interessante di far notare, che, con la riduzione acetilante, il doppio legame della catena amilenica rimane inalterato.

Infatti l'acido triacetil-biidrolapacico, a cui spetta la formula (IV), in soluzione alcoolica, in presenza di nero di Pd, assorbe una quantità di idrogeno corrispondente a due atomi per $C_{21}H_{22}O_6$.

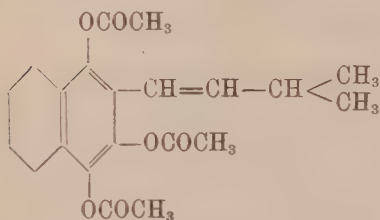
Il prodotto di riduzione ottenuto si purifica, facendolo cristallizzare dall'alcool. Aghetti bianchi fusibili a 110-112°. Seccato a 100°, è stato analizzato.

Sostanza g. 0,2170: CO_2 g. 0,5376; H_2O g. 0,1250.

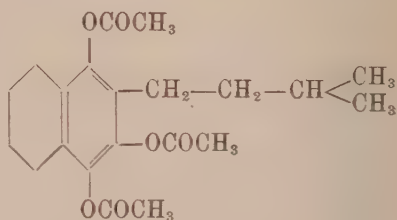
Donde % trovato C 67,57 H 6,44

$C_{21}H_{24}O_6$ calcolato C 67,8 H 6,4

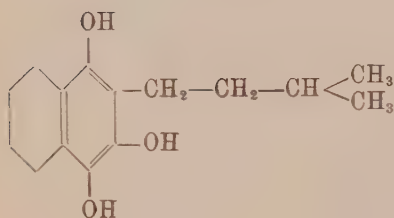
Questa sostanza, per il modo con cui è stata preparata, deve avere dunque la formula (V), cioè deve essere un *triacetil-derivato dell'acido tetraidro-lapacico* della formula (VI).



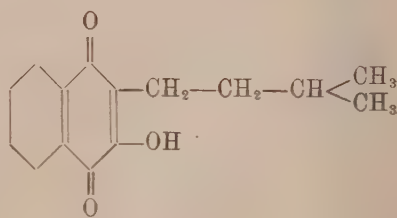
IV



V



VI



VII

(¹) Paternò e Minunni, Gazz. ch. ital., 19, 601 (1889).

Questo acido tetraidrolapacico però non si può isolare, perchè si ossida immediatamente.

Quando si saponifica con potassa il suo triacetil-derivato, fusibile a 110-112°, si forma invece l'*acido biidrolapacico* giallo, fusibile a 87-89°, che ho già descritto (formula VII).

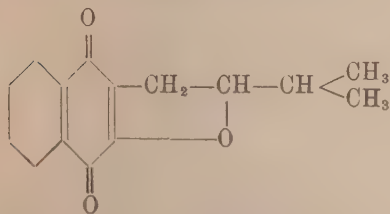
Riduzione dei lapaconi.

Fin dalla sua prima Nota sui derivati dell'acido lapacico, il prof. Paternò ⁽¹⁾ fece notare che per azione dell'acido solforico l'acido lapacico viene trasformato in un isomero di color rosso aranciato, fusibile a 156°, privo di proprietà acide, che chiamò *lapacone*. Facendo agire l'acido nitrico sull'acido lapacico, osservò inoltre che insieme col *lapacone* si formava un'altra sostanza di color giallo.

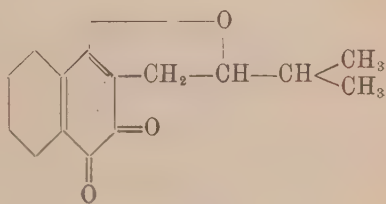
Hooker ⁽²⁾ riprese lo studio del *lapacone* ed osservò che, sciogliendo l'acido lapacico in un miscuglio di acido acetico e di acido cloridrico concentrato e riscaldando su b. m. la soluzione, si formava una sostanza gialla fusibile a 116-117°, pure isomera dell'acido lapacico, anch'essa priva di proprietà acide.

Egli fece notare inoltre che questa sostanza è identica alla sostanza gialla che il prof. Paternò aveva ottenuta per azione dell'acido nitrico.

Per spiegare la differenza fra questi due isomeri e l'acido lapacico, Hooker, accettando la formula dell'acido lapacico quale era stata data dal prof. Paternò, ammise che il *lapacone* giallo fosse un derivato dell' α -naftochinone (della formula VIII) e lo chiamò *α -lapacone*, mentre il *lapacone* rosso sarebbe, secondo Hooker, un derivato del β -naftochinone (della formula IX) e lo chiamò *β -lapacone*.



VIII



IX

Queste due formule sono bene in accordo col comportamento chimico dei *lapaconi*, e sono comunemente accettate.

Dopo aver fatto le descritte esperienze sopra l'acido lapacico, volli estenderle ancora ai *lapaconi*.

⁽¹⁾ Paternò, Gazz. ch. ital., 12, 337 (1882).

⁽²⁾ Hooker Soc., 61, 611 (1892).

Nel ripreparare questi due composti, ho osservato che la natura dell'acido minerale, che si fa agire sull'acido lapacico, non ha, come si poteva supporre dalle esperienze precedenti, influenza specifica sulla formazione dell'uno o dell'altro lapacone, ma che questa formazione dipende soltanto dalla temperatura a cui si opera.

Infatti, facendo agire l'acido solforico a caldo sull'acido lapacico, ho potuto constatare la formazione dell' α -lapacone; e inversamente, per azione dell'acido cloridrico a freddo, ho notato che si forma β -lapacone.

In verità si ottengono generalmente delle mescolanze nelle quali prevale l' α -lapacone o il β - secondo la temperatura.

In soluzione alcoolica, i due lapaconi, in presenza di nero di Pd, assorbono un volume di idrogeno corrispondente a due atomi per $C_{15}H_{14}O_3$.

Quando però le soluzioni scolorate dei prodotti di riduzione, così ottenuti, vengono in contatto dell'aria, subito si colorano di nuovo; facendo distillare l'alcool, si riottengono i lapaconi inalterati.

Questo comportamento va bene d'accordo con le formole sopra scritte per questi composti, formole nelle quali non sono doppi legami capaci di addizionare stabilmente idrogeno. L'idrogeno assorbito in presenza di Pd, non fa altro che trasformare questi due chinoni nei corrispondenti idrochinoni, i quali all'aria si riossidano immediatamente.

Prodotti di riduzione stabili ho invece ottenuto tanto dall' α - quanto dal β -lapacone, sottoponendoli alla riduzione acetilante.

Il β -lapacone (lapacone rosso fusibile a 156°), riscaldato con anidride acetica e polvere di zinco, dà origine ad una sostanza che, purificata per cristallizzazione dall'alcool bollente, si presenta in aghetti bianchi fusibili a $160-162^\circ$. All'analisi ha dato i seguenti risultati:

Sostanza g. 0,2185: CO_2 g. 0,5570; H_2O g. 0,1200.

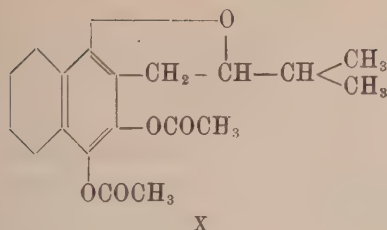
Donde % trovato C 69,63 H 6,10

$C_{19}H_{20}O_5$ calcolato C 69,51 H 6,09

Questo prodotto è identico, in tutte le sue proprietà, al *biacetil-derivato dell'idro- β -lapacone*, che il prof. Paternò e Minunni ⁽¹⁾ avevano preparato, per azione dell'anidride acetica sulla sostanza ottenuta, riducendo il lapacone con sodio e alcool, operando fuori del contatto dell'aria.

A questo composto, in accordo con la formola soprascritta per il β -lapacone, dovrà attribuirsi la formola di costituzione (X)

(1) Paternò e Minunni, Gazz. ch. ital., 19, 611 (1889).



Dall' α -lapacone (lapacone giallo fusibile a 116-117°) con la riduzione acetilante, nelle medesime condizioni, ho ottenuto un prodotto, che, cristallizzato dall'alcool, si ha in aghetti bianchi che fondono a 170-172°.

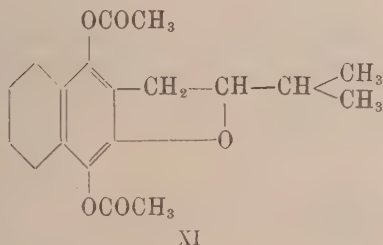
La sostanza è stata seccata a 100° e analizzata.

Sostanza g. 0,2138: CO₂ g. 0,5447; H₂O g. 0,1158.

Donde % trovato C 69,61 H 6,06

C₁₉H₂₀O₅ calcolato C 69,51 H 6,09

A questo *biacetil-derivato dell'idro- α -lapacone*, ottenuto dall' α -lapacone della formola (VIII), si deve dare la formola di costituzione (XI):



Riduzione del derivato biacetilico dell'acido lapacico.

Riscaldando per pochi minuti l'acido lapacico con anidride acetica e acetato sodico, il prof. Paternò ⁽¹⁾ ottenne il derivato monoacetilico fusibile a 81°, che prima ho rammentato.

Prolungando il riscaldamento per circa un quarto d'ora, notò che si forma invece un composto differente, fusibile a 131-132°. Questo, all'analisi, dà risultati corrispondenti alla formola C₁₅H₁₂O (O CO CH₃)² di un derivato biacetilico dell'acido lapacico. Il peso molecolare ⁽²⁾, determinato col metodo crioscopico, concorda con questa formola. La costituzione di questo derivato biacetilico è però rimasta sempre oscura.

⁽¹⁾ Paternò, Gazz. ch. ital., 12, 337 (1882).

⁽²⁾ Paternò e Nasini, Gazz. ch. ital., 16, 270 (1886).

Perciò, avendone a disposizione qualche grammo, ho voluto, anche con questo, fare esperienze di riduzione, per cercare di chiarire la sua costituzione.

La riduzione acetilante ha dato risultato negativo; il prodotto è rimasto inalterato.

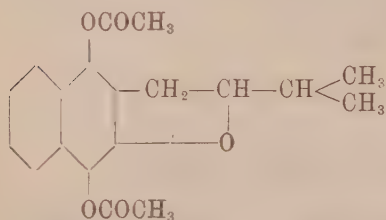
Buon esito ha avuto invece la riduzione con idrogeno in presenza di nero di Pd. In queste condizioni la sostanza, disciolta in alcool, assorbe una quantità di idrogeno corrispondente a due atomi per una molecola di $C_{19}H_{18}O_5$.

Il prodotto di riduzione, così ottenuto, si fa cristallizzare dall'alcool. All'analisi dà i seguenti risultati:

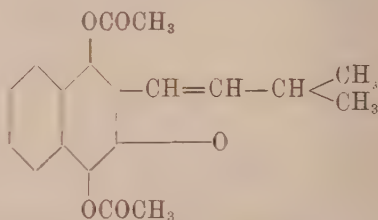
Sostanza g. 0,2180:	CO_2 g. 0,5540;	H_2O g. 0,1215.
Donde % trovato	C 69,31	H 6,23
$C_{19}H_{20}O_5$ calcolato	C 69,51	H 6,09

Questo prodotto di riduzione è in aghetti bianchi, fusibili a $170-172^\circ$. Esso ha la stessa composizione centesimale, lo stesso punto di fusione, gli stessi caratteri del biacetil-derivato dell'idro- α -lapacone che sopra ho descritto. Una mescolanza delle due sostanze conserva il punto di fusione $170-172^\circ$.

Siccome al biacetil-derivato dell'idro- α -lapacone si deve attribuire, come ho detto prima, la formola (XII), è dunque molto probabile che al cosiddetto biacetil-derivato dell'acido lapacico spetti la formola (XIII)



XII



XIII

cioè una delle formole che già Hooker ⁽¹⁾ aveva supposto dovesse assegnarsi a questa sostanza.

⁽¹⁾ Hooker, Soc., 61, 611 (1892).

Chimica. — *Autossidazioni alla luce nella serie dei terpeni.*
Nota II di E. SERNAGIOTTO, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

AUTOSSIDAZIONE DEL PULEGONE.

Vennero esposti alla luce, dal giugno all'ottobre, 50 gr. di pulegone, divisi in 10 palloni della capacità di 5 litri, pieni di ossigeno e contenenti ciascuno 100 cm.³ di acqua. All'apertura si notò una forte aspirazione; il contenuto era diventato acido ed il chetone in parte resinificato.

La parte liquida di tutto il prodotto diede, per distillazione con vapore d'acqua, prolungata fino a reazione neutra del distillato, una parte volatile fortemente acida, di odore terpenico ed un residuo acquoso, pure acido, oltre ad una certa quantità di pece.

Parte volatile. — Come per il citronellale, questa venne neutralizzata con carbonato sodico, indi distillata nuovamente in corrente di vapore; nella parte volatile, oltre ad *acetone*, che fu identificato in forma del p. bromofenilidrazone, fondente a 94°, passa una piccola quantità di olio, riconosciuto per pulegone inalterato a mezzo del semicarbazone caratteristico che fonde a 174° (1).

Nel pallone, allo stato di sale sodico rimane una notevole quantità di *acido formico*, insieme a tracce di acidi grassi superiori, di cui si poté avvertire l'odore, ma non preparare un sale argentario analizzabile.

Parte fissa. — Il liquido acido, rimasto nel pallone dopo la distillazione del prodotto greggio, separato dalla pece formatasi, venne reso alcalino con carbonato sodico e successivamente estratto con etere. Si ottenne una massa cristallina, solubile in alcool, etere, acido acetico, benzolo, la quale, da quest'ultimo solvente, si presenta in prismi, che fondono a 183°5 ed hanno la composizione C₁₀H₁₄O₃.

Analisi:

Sostanza	3,371 mgr.	CO ₂	8,17 mgr.	H ₂ O	2,31 mgr.
"	3,028 "	CO ₂	7,33 "	H ₂ O	2,12 "
	Trovato		Calcolato per C ₁₀ H ₁₄ O ₃		
C	66,09	66,02	65,90		
H	7,66	7,83	7,74		

Non è stabile al permanganato a freddo. È il *lattone di un acido chetonico*, poichè mentre è insolubile nei carbonati, si scioglie facilmente negli idrati alcalini; dà un sale argentario insolubile, in fiocchi bianchi, facilmente alterabile e dà un ossima che purificata dall'etere petrolico fonde a 116°.

(1) Baeyer ed Henrich. Berichte 28, pag. 653.

Analisi :

Sostanza: 4,136 mgr. Azoto, misurato a 20° e 768° mm. cmc. 0,265

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{15}NO_5$
N	7,54	7,10

È più stabile del corrispondente acido; infatti, scomponendo il sale potassico con acido solforico, si può estrarre con etere il lattone inalterato, col punto di fusione 183°5.

Per ossidazione col miscuglio cromico, dà un acido cristallino che purificato dall'acqua fonde a 86°7 ed è identico all'acido *β*-metilglutarico.

Analisi :

Sostanza : 3,828 mgr.; CO_2 6,90 mgr.; H_2O 2,39 mgr.

	Trovato	Calcolato per $C_8H_{10}O_4$
C	49,16	49,31
H	7,01	6,90

Contemporaneamente si forma pure *acetone*, identificato nei prodotti volatili dell'ossidazione, a mezzo del suo p. bromofenilidrazone, che fonde a 94°.

Il liquido alcalino diede poi. per acidificazione, un olio bruno, vischioso estraibile con etere, che presentava la reazione di Lieben ed in piccola parte precipitava con la fenilidrazina, ma che non accennava a solidificare.

Neutralizzato con ammoniaca, per aggiunta di solfato di rame, diede un precipitato fioccoso, verde, di sale ramico. poco solubile, da cui, con idrogeno solforato, fu posto in libertà l'acido, il quale, purificato dall'acqua, fonde a 84° e corrisponde all'acido *β*-metiladipico.

Analisi:

Sostanza: 4,575 mgr.; CO_2 11,15 mgr.; H_2O 309 mgr.

	Trovato	Calcolato per $C_7H_{12}O_4$
C	52,80	52,47
H	7,55	7,55

Dal sale di rame rimasto sciolto nel liquido, scomposto con idrogeno solforato, si ebbe un liquido denso, giallognolo, il quale lentamente si rapprese in piccola parte in cristalli, riconosciuti pure per acido *β*-metiladipico.

Il residuo oleoso, precipitato frazionatamente con nitrato argentario, dette dei prodotti fiocchi bianchi, insolubili in acqua, alterabili all'ebullizione ed alla luce.

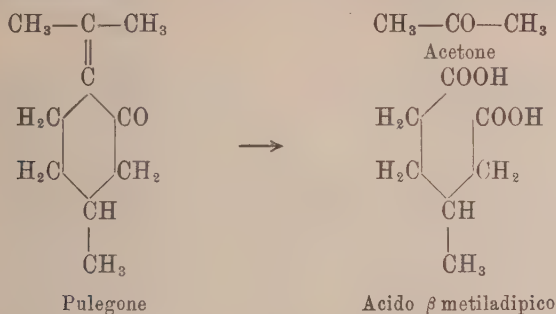
Dalla frazione mediana, presumibilmente più pura, si ebbero numeri corrispondenti al sale argentario di un acido di composizione $C_{10}H_{18}O_5$, di ancora ignota costituzione.

Analisi :

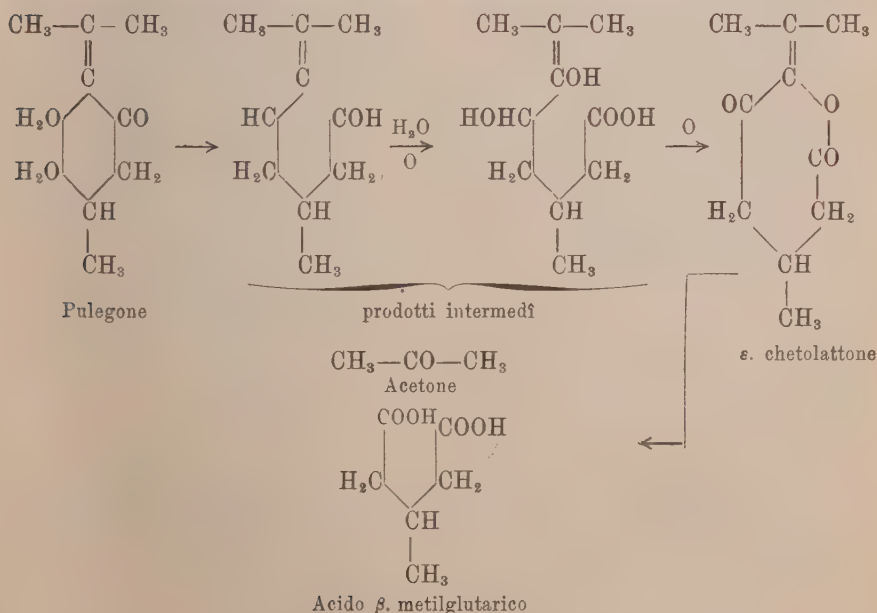
Sostanza 4.442 mgr. ; CO₂ 4,44 mgr. ; H₂O 1,45 mgr. ; Ag 2,208 mgr.

	Trovato	Calcolato per C ₁₀ H ₁₆ O ₈ Ag ₂
C	27,26	27,29
H	3,65	3,73
Ag	49,71	49,96

Nell'autossidazione alla luce, il pulegone si comporta in parte come rispetto al permanganato ⁽¹⁾ dando *acetone* ed *acido β-metiladipico*.



Oltre a questi prodotti, si forma un *chetolattone* non saturo della formula C₁₀H₁₄O₈, il quale, per ossidazione, dà *acetone* ed *acido β-metilglutarico*. Esso non era ancor noto; tuttavia i fatti osservati permettono con una certa probabilità di dedurne la formula di costituzione, ammettendo alcune trasformazioni del pulegone, aventi un perfetto riscontro in altre, osservate da Ciamician e Silber, per vari chetoni ciclici, esposti alla luce, con o senza ossigeno; questo nuovo composto sarebbe un *ε* chetolattone.



⁽¹⁾ Accad. Lincei, vol. 16, I, pag. 835 (1907); vol. 17, I, pag. 179 (1908); vol. 17, I, pag. 577; vol. 18, I, pag. 317.

Mineralogia. — *Studio mineralogico della Lepidolite Elbana* ⁽¹⁾. Nota del dott. PROBO COMUCCI, presentata dal Corrispondente FEDERICO MILLOSEVICH.

Della lepidolite dell'Elba nella letteratura è fatta menzione non raramente, non in riguardo ad uno studio di proposito, piuttosto per confrontare alcuni dati fisici con le lepidoliti meglio studiate di Moravia, d'America ecc. Il mineral: lepidolitico dell'Elba è stato definito per tale dal semplice aspetto e nessuna analisi completa esiste su di esso. Solo alcuni dati chimici di una varietà speciale sono stati determinati da G. D'Achiardi ⁽²⁾. Ho creduto utile perciò di compiere uno studio chimico di questo minerale interessante se non per altro, perchè fluorifero e quindi legato alla genesi della ricca produzione dei minerali dei graniti Elbani.

* * *

L'analisi di questo minerale è stata condotta sulla guida dei trattati di analisi chimica e specialmente di quello del Treadwell. Si richiedono almeno tre campioni: uno per le terre e la silice, uno per gli alcali ed uno per il fluoro; e faccio notare questa circostanza, perchè i tre campioni, dovendo cercare la massima purezza e perfezione nelle scagliette lepidolitiche da sottoporre all'analisi, non ho potuto trarli da un medesimo pezzo, sia per la non sufficiente grandezza di questi, sia per evitare la distruzione di esemplari del Museo di Firenze.

È questa una ragione che compromette *a priori* l'esattezza della somma dei componenti riferiti a cento. Si aggiunga la lunghezza e la difficoltà della ricerca complicata con il litio negli alcali e il pericolo che nel fluoro di calcio sia rimasto un poco di silice nonostante il trattamento con carbonato d'ammonio e quindi con l'ossido di zinco ammoniacale. Si spiega così come le analisi della lepidolite che si trovano nella letteratura non ostante fatte da valentissimi sperimentatori, diano una somma, specialmente le più recenti, di circa 102, il che non accade in generale.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia del R. Istituto di studii superiori di Firenze.

⁽²⁾ Proc. verb. Soc. tosc. Sc. nat. Pisa, 14 (1904), 91,

Ecco il risultato della mia analisi:

SiO ₂	48,05
Al ₂ O ₃	28.18
Fe ₂ O ₃	2.51
TiO ₂	0.16
MnO	2.13
K ₂ O	7.77
LiO	5.27
F	6.32
H ₂ O	1.65
	<hr/> 102,05

Nella somma qui sopra riferita tutti i cationi sono considerati come combinati all'ossigeno; peraltro il fluoro presente sostituisce una parte di questo negli ossidi e dalla somma deve perciò detrarsi la quantità equivalente di ossigeno. Questa rispetto a 6.32 di fluoro è 2.66 che sottratta da 102,05, dà 99.39.

In merito al procedimento dell'analisi, la separazione delle terre dal manganese fu fatta mediante il carbonato di bario. Nella percentuale del potassio è compresa anche quella eventuale del rubidio e del cesio, i quali elementi da Pisani sono stati riscontrati nella lepidolite Elbana, ma dosati forse solo approssimativamente. Infatti egli ne dà la seguente notizia: « La lepidolite rosa dell'Elba contiene una quantità di rubidio uguale a quella di Rozena e una quantità minore di cesio (un quarto di quella di rubidio) ⁽¹⁾. Il litio fu dosato nel liquido filtrato dal cloroplatinato di potassio, previa separazione del platino, con il metodo dell'alcool amilico. Una nota particolare merita il titanio per la prima volta ritrovato in questo minerale; ed ancora maggiormente notevole è la forte percentuale di ferro, il quale negli altri giacimenti è stato sempre ritrovato in quantità piccolissima, quantunque in un'isola di minerali di ferro anche tutti gli altri è presumibile che ne siano al massimo inquinati, senza contare che come minerale fluorifero la lepidolite potrebbe essere legata alla genesi dell'ossido di ferro stesso.

La formula ordinaria della lepidolite è:



Per calcolare una formula sulla mia analisi ho io pure preso in considerazione solamente gli elementi sopraccennati, e in conseguenza ho sostituito all'ossido di ferro, questa volta rilevante, l'equivalente in ossido di

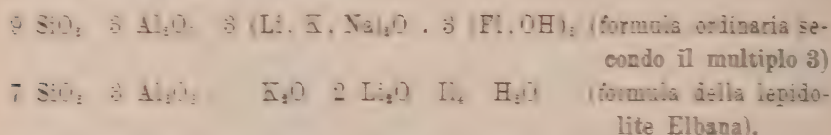
(¹) Compt. rend. 57 (1864), 715.

alluminio, cioè 1.60 di Al_2O_3 in luogo di 2.51 di Fe_2O_3 ; cosicchè la percentuale di Al_2O_3 diviene 29.78.

La formula che meglio di ogni altra corrisponde, a mio parere, alla mia analisi sarebbe:



la quale risulta in complesso, rispetto all'ordinaria, più povera di silice come si vede dal seguente prospetto:



Da lo specchietto delle percentuali secondo la mia analisi e secondo la formula da me proposta per farne rilevare il grado di attendibilità:

	Trovato	Calcolato
SiO_2	48.05	48.32
Al_2O_3	29.78	28.56
K_2O	7.77	8.76
Li_2O	5.27	5.59
F	6.32	7.08
H_2O	1.65	1.67

* * *

Della lepidolite Elbana ho eseguito una determinazione di densità con scopo diagnostico, per confermare cioè di trattarsi di vera lepidolite e d'altra parte verificare se il contenuto anormale in ferro portava una qualche variazione. La determinazione fu fatta con la bilancia di Westphal. Per liquido da ridurre a uguale densità fu usato il liquido di Taculet convenientemente diluito con acqua. L'esperienza dette il valore: 2.842, valore che entra benissimo nei limiti della densità per la lepidolite: 2.8-2.9.

* * *

Più importanti per questo minerale sono le possibili determinazioni ottiche. Non potendo applicarle, per determinare l'indice di rifrazione, il metodo del duca di Chaulnes, perchè richiede omogeneità e limpidezza almeno nel punto, il che non avveniva nel mio materiale, e nemmeno essendo applicabile il metodo del totalrefrattometro, perchè le lamine presentavano cattive superfici e non erano perfettamente piane, ho dovuto limitarmi alla ricerca dell'indice medio con il metodo di Baekè, mediante un liquido di uguale indice di rifrazione: così ottenevo $n_m = 1.550$ per la luce del sodio.

Poichè i valori dati per gli indici della lepidolite sono: $\beta = 1,59$, e $\gamma = 1,60$ ⁽¹⁾ si può concludere che la lepidolite, dell'Elba ha un indice di rifrazione decisamente inferiore. La lepidolite dei giacimenti del Madagascar, da non molti anni additata agli studiosi dal Lacroix, ha gli indici seguenti:

n_g	n_m	n_p	
1,5569	1,5522	2,5318	a)
1,5621	1,5570	1,5308	b)

a) lepidolite di Antsangambato; b) lepidolite di Antoboka ⁽²⁾.

Mentre vi sarebbe accordo fra la lepidolite dell'Elba e queste nuove lepidoliti per l'indice di rifrazione, vi è poi disaccordo per altri caratteri contro l'aspettativa, perchè la paragenesi è nei due casi molto simigliante come dirò in seguito.

È interessante in questa lepidolite determinare l'angolo degli assi ottici. Esso è molto più piccolo di tutti quelli dei quali si trova menzione nella letteratura per questo minerale. I valori massimi dell'angolo assiale per le lepidoliti americane raggiungono 77°, ma Tschermak ⁽³⁾ si è occupato anche dell'angolo assiale della lepidolite Elbana, limitando la notizia che l'angolo varia fra 50° e 72°; cosicchè una tendenza a dare un angolo assiale piccolo era già notato nel minerale di questa località. D'Achiardi (loc. cit.) osservò nella varietà da lui studiata un angolo ampio, ma non di un valore preciso. Su di una lamina, che dava una buona figura assiale, ottenni $2E = 21^\circ 19'$; ma altre lamine esaminate al microscopio, se non permisero nuove misure, confermarono la piccolezza dell'angolo nei limiti della misura precedente.

Per assodare se il piano degli assi ottici fosse perpendicolare o parallelo al piano di simmetria, in vista del dubbio, per il forte tenore in ferro, che si trattasse di Zinnwaldite, ho costruito la figura di percussione e determinato rispetto a questa la orientazione del piano assiale. La traccia di questo formava un angolo di 25° con uno dei rami della figura di percussione; rimane perciò escluso il caso di una mica di 2^a specie e quindi anche di Zinnwaldite ⁽⁴⁾. Se l'angolo di 25° sopradetto non raggiunge il valore teorico di 30°, è da attribuirsi alla difficoltà di ottenere una buona immagine assiale nel campo del microscopio, ove sia pure visibile la figura di percussione.

La piccolezza dell'angolo assiale se è insolita, non è in disaccordo con quanto già si sa sulle miche. Tschermak ⁽⁵⁾ trovava per l'anomite e la mu-

⁽¹⁾ Groth's Zeit. 12, 8.

⁽²⁾ Duparc, Wunder, Sabot, Mem. Soc. phys. Genève, XXXVI, 283 (1910).

⁽³⁾ Groth's Zeit. 2, 47.

⁽⁴⁾ È però da ricordare che Scharizer ha trovato di 2^a specie anche delle lepidoliti. Groth's Zeit. 12-5 e 13, 464.

⁽⁵⁾ Groth's Zeit. 2, 49.

scovite (con il PA normale a 010) $\varrho > v$ e l'angolo assiale decrescente con il salire del tenore in ferro. Meroxeno e Hogopite di 2° specie (PA parallelo a 010) mostrano $\varrho > v$ e l'angolo assiale crescente con il tenore in ferro⁽¹⁾. Essendo dunque la lepidolite Elbana una mica di 1° specie ed avendo un contenuto in ferro relativamente alto, dovrà avere anche l'angolo assiale minimo. Anzi posso qui aggiungere che prove qualitative mi farebbero presupporre in certi campioni una ricchezza in ferro anche superiore a quella data dall'analisi qualitativa completa.

* * *

Per ultimo aggiungo le notizie poco importanti che posso partecipare sui caratteri cristallografici del minerale. Essi erano già tanto scarsi che non è stato possibile mai calcolare nemmeno un rapporto assiale, ed io non sono stato più fortunato. Macroscopicamente il minerale è ben definito « In cristalli laminari, e in aggregati sferoidali a rosette o in lamine estese »⁽²⁾. Al microscopio si presenta come sottili lamine a contorni esagonali; gli angoli piani misurati oscillano intorno ai 60°, piuttosto al disotto che al disopra. Raramente si vedono facce laterali, forse di prisma, forse anche di piramide. Le lamine estese differiscono un poco per il colore che è piuttosto bianco argenteo, talvolta fino grigio. Su un campione di queste varietà ho fatto la seguente analisi parziale:

SiO ₂	45,58
Al ₂ O ₃	29,68
Fe ₂ O ₃	1,89
TiO ₂	0,20
MnO	1,65

Risulta che anche queste lamine mantengono le caratteristiche del minerale cioè manganesifere, titanifere e ferrifere. Del resto lamine con il diametro, come queste, anche di 5 cm., non sono più una rarità dal momento che Lacroix parla di lamine lepidolitiche con il diametro di 15 cm. nel giacimento di Mont Bity (Maharitra, Madagascar).

Di questo giacimento il citato autore dà una dettagliata notizia⁽³⁾ e possiamo osservare che consiste in un granito pegmatitico ricco di tormalina della varietà rubellite, ove si trovano anche trifano e bityite, nuovo minerale litinifero pseudoesagonale specifico di questa località. Fa perfettamente

(¹) Panichi, Acc. Lincei (1906) pp. 14 e 18.

(²) Millosevich F., 5000, Elbani, Firenze (1914).

(³) Bull. Soc. min. Franc. (1908) 218.

riscontro il giacimento Elbano pure in granito tormalinifero, ma con tormaline in prevalenza nere, ed accompagnato da altro minerale litinifero, la petalite.

Ma l'analisi di lepidoliti di Antsangambato (*a*) e Antaboka (*b*) ⁽¹⁾ che si trovano nelle stesse condizioni di giacimento di Maharitra dimostrano trattarsi di miche molto più silicee, meno alluminifere e ferrifere, inoltre meno dense. L'angolo degli assi ottici, come è prevedibile dalla composizione, è molto più grande. Le condizioni dunque di genesi avevano differenze particolari spiccate.

Eccone i dati relativi:

	<i>a</i>)	<i>b</i>)
SiO ₂	55,97	57,25
Al ₂ O ₃	17,70	17,65
Fe ₂ O ₃	0,68	0,51
MgO	0,09	0,17
MnO	0,58	0,24
K ₂ O	10,14	10,11
Na ₂ O	0,82	0,78
Li ₂ O	4,71	5,42
F	7,12	6,28
H ₂ O	2,24	1,38
	100,05	99,79
Densità	2,799	2,804
2 E	74°26	74

Riassumendo, la lepidolite dell'Elba è una vera lepidolite di 1° specie litinifera e fluorifera: ma ha un contenuto superiore in ferro e specialmente un angolo assiale molto piccolo.

Sento il dovere di ringraziare pubblicamente il mio maestro, prof. Millosevich, per gli aiuti e i consigli, di cui mi è stato largo in questa ed in altre occasioni.

⁽¹⁾ Duparc, Wunder, Sabot, op. cit.

Patologia. — *Ulteriori ricerche sulla leishmaniosi interna del Mediterraneo.* Nota del dott. CARLO BASILE⁽¹⁾, presentata dal Socio B. GRASSI.

Trasmissione della leishmaniosi interna per via gastrica.

Le ricerche sulla trasmissione della leishmaniosi interna per via gastrica sono state da me eseguite dal marzo al maggio dell'anno 1914: io ho tardato a pubblicarle, perchè mi proponevo riferire tutta una nuova serie di ricerche originali nel mio lavoro definitivo sulla leishmaniosi interna del mediterraneo, che sarebbe stato di già certamente pubblicato se, in seguito ai ripetuti esperimenti di Laveran e Franchini, sull'infezione dei topi per mezzo di flagellati di invertebrati, anche per consiglio del mio Maestro prof. B. Grassi, non avessi ritenuto più opportuno, nell'interesse scientifico, differirne la pubblicazione e vagliare, con nuove ricerche originali, le conclusioni di questi autori.

Tuttavia, avendo letto nel Tropical Diseases Bulletin (15 aprile 1915) alcune ricerche dell'Archibald sulla trasmissione della leishmaniosi interna per via gastrica io mi propongo in questa Nota riferire alcune mie ricerche simili a quelle dell'Archibald.

Questo autore ha ottenuto la trasmissione della leishmaniosi (virus del Soudan) in due scimmie, facendo mangiare ad una di esse materiale di una scimmia sperimentalmente infetta, ed all'altra materiale di un caso mortale di leishmaniosi.

L'Archibald ha tentato anche di infettare un cucciolo per via gastrica e sebbene il cucciolo presentasse, dopo qualche tempo, segni di dimagrimento e di anemia, tuttavia sacrificato dopo 162 giorni, non è stata mai rinvenuta alcuna *leishmania* nei suoi organi emopoietici: soltanto nel fegato l'autore avrebbe osservato taluni corpi cocciformi che, dopo un'accurata disamina dei lavori di Smallman e Wenyon, egli ritiene che sieno di origine protozoica e che debbano associarsi alle *leishmania*.

Le mie ricerche sono state eseguite su due cuccioli: ambedue dell'età di un mese, nati ed allevati in laboratorio con tali cautele da poter assicurare che non sono stati mai in contatto con insetti ematofagi. Essi cuccioli il giorno 7 marzo dell'anno 1914 mangiarono il fegato e la milza di un cane intensamente infetto di leishmaniosi naturale: dopo qualche tempo presentarono segni di dimagrimento. Al 60° giorno dall'aver mangiato il

(¹) Dall'Istituto di Anatomia Comparata della R. Università di Roma.

materiale infetto, uno di essi, il più dimagrito, fu sacrificato; l'altro fu sacrificato al 67° giorno. Nei preparati per strisciamento (fissati e coloriti al Giemsa) eseguiti dalla milza, dal midollo osseo e con maggior frequenza in quelli eseguiti dal fegato, io ho osservato delle forme, le quali presentavano un plasma roseo o bleu-chiaro contenente nel suo interno uno o più corpicciuoli dall'apparenza di cromatina; in questi stessi preparati, provenienti dagli organi emopoietici dell'uno e dell'altro cucciolo, io ho anche osservato, sebbene molto raramente, altre forme ancora le quali presentavano la morfologia tipica delle *leishmania*; esse mostravano un plasma roseo o bleu-chiaro, nel cui interno distinguevasi un macronucleo ed un micronucleo.

Io ritengo che le suddette forme costituite da un plasma contenente nel suo interno uno o più corpicciuoli di cromatina appartengono a stadi evolutivi di *leishmania*; infatti io ho potuto riscontrare forme del tutto identiche nel fegato e nella milza di giovani conigli, ripetute volte inoculati con virus culturale di *leishmania* di origine infantile e di origine canina, senza che li avessi mai osservati nel fegato e nella milza di numerosi altri giovani conigli sani tenuti per controllo.

Come è costante metodo in tutte le mie ricerche sperimentali, anche in questi miei esperimenti di trasmissione della leishmaniosi interna per via gastrica io ho tenuti per controllo altri due cuccioli nati nello stesso parto ed allevati nelle stesse condizioni dei due cuccioli che hanno mangiato materiale infetto di *leishmania*.

Questi due cuccioli di controllo si sono mantenuti sempre sani. Anche essi furono sacrificati come i precedenti, e per quante minuziose ricerche avessi eseguito, non ho mai osservato nei loro organi alcuna delle forme surriferite.

Risulta per ciò dalle mie ricerche che io sin dal maggio dell'anno 1914 ho ottenuto in cuccioli, per via gastrica, la trasmissione della leishmaniosi interna di origine canina.

Concomitanza di infezione da *Leishmania* e da *Piroplasma* nel cane.

Un'altra osservazione fatta dall'Archibald sulla concomitanza di infezione nell'uomo da *leishmania* e da *filaria* mi induce a riferire in questa Nota un mio esperimento eseguito anche esso nei mesi di aprile e maggio dell'anno 1914 e che è stato da me oralmente comunicato all'Associazione fra i liberi cultori di scienze mediche e naturali dell'Università di Roma nella seduta dell'11 giugno 1914.

Si tratta, per quanto a me consta, del primo caso di concomitanza della leishmaniosi con altra infezione protozoica.

Un cane anemico e dimagrito intensamente infetto di leishmaniosi fu tenuto in osservazione per 15 giorni; l'esame microscopico del midollo osseo

tibiale rivelò soltanto la presenza di numerosissime *leishmania*; non furono riscontrati altri parassiti; l'esame microscopico del sangue periferico ripetuto quotidianamente non rilevò mai nè *leishmania*, nè altri parassiti di sorta.

Al 15° giorno di osservazione questo cane fu portato in un canile di uno degli istituti scientifici dell'Università ove, era a mia conoscenza, che si trovavano cani con numerose zecche e che alcuni di essi erano infetti di piroplasmosi.

Il cane infetto di leishmaniosi dopo 38 giorni da quando era stato posto a convivere con i cani infetti di piroplasmosi fu da me riveduto; esso presentava dimagrimento ancor più notevole, impossibilità assoluta di reggersi sul treno posteriore, notevoli edemi alle estremità; ancora due ulcere apparivano presso l'articolazione tibio tarsica; esse si approfondivano notevolmente e con uno specillo io ho potuto accertare che esse erano in continuità l'una dell'altra e che i tessuti *extra* articolari erano stati distrutti. L'esame microscopico del materiale tolto da queste ulcere rivelò la presenza non solo di tipiche *leishmania* ma anche di *piroplasma*; il sangue periferico esaminato successivamente era ricco delle varie forme tipiche di *piroplasma*.

L'animale dopo altri pochi giorni è morto e dai suoi organi emopoietici, ma specialmente dal midollo costale, io ho potuto ottenere dei preparati in cui è veramente notevole la quantità dei due protozoi, *leishmania* e *piroplasma*, associati l'uno all'altro.

L'infezione sperimentale da *leishmania* nelle pulci.

Il dott. Pereira Da Silva ha pubblicato recentemente negli *Arquivos do Instituto Camara Pestana* (tomo IV, fasc. III, Lisbona, 1915) alcuni suoi tentativi di infezione sperimentale di pulci di uomo (*Pulex Irritans*) con virus di leishmaniosi interna infantile, eseguiti per un periodo di 75 giorni dal 26 maggio all'8 agosto 1914. Le pulci adoperate dall'autore sono state soltanto 25, le quali, legate col metodo del Noeller, erano poste a succhiare ogni due giorni sulla cute di un bambino infetto.

Dai protocolli riferiti dall'autore, risulta che esse sono state divise in tre gruppi: un primo gruppo, di 8 pulci (26 maggio - 8 agosto 1914): un secondo di 9 pulci (11 giugno - 8 agosto 1914); un terzo di 8 pulci (21 luglio - 8 agosto 1914). Soltanto 2 pulci appartenenti al primo gruppo han succhiato sul bambino infetto un massimo di 38 volte; tutte le altre han succhiato un numero di volte sempre più decrescente fino ad un minimo di due.

L'autore assicura di aver nutrito sulla propria cute per 15 giorni ogni pulce prima di sottoporla all'esperimento, per accertare che non fosse naturalmente infetta di *herpetomonas* o *crithidia*; e tenendo presente quanta influenza abbia la temperatura sul ciclo evolutivo dei protozoi patogeni nei loro ospiti trasmissori, egli assicura anche che le pulci, subito dopo il pasto, erano trasportate dall'ospedale di s. Josè, ove degeva il bambino infermo,

all'istituto Camara Pestana, e quivi eran poste in una stufa alla temperatura di 22° ctgr.; questa temperatura, come io ho dimostrato, è molto opportuna all'ulteriore sviluppo delle *leishmania*. Il Pereira ha esaminato le deiezioni delle 25 pulci sia all'atto del succhiamento, sia negli intervalli, ma non ha mai riscontrato in esse *leishmania*; egli perciò conclude l'esposizione delle sue ricerche scrivendo, in modo obbiettivamente scientifico, che « se esse non possono dimostrare in modo assoluto che le pulci non si infettano, dimostrano tuttavia che questa infezione è molto difficile ».

Che la infezione di pulci con virus di *leishmania* sia difficile, è stato anche da me osservato in talune ricerche fin oggi non pubblicate; del resto tale difficoltà è stata anche da me rilevata in natura sin dal 1910, quando io, in base ad estesissime ricerche nelle pulci raccattate sui bambini e sui cani infetti di *leishmania*, ho potuto osservare ed ho pubblicato che soltanto il 4 per mille di esse erano infette di protozoi « tipo *leishmania* »; i quali protozoi, inoculati in cuccioli ed in topi (*mus musculus*) hanno determinato in questi animali un'infezione caratterizzata dagli stessi sintomi e dallo stesso reperto parassitario che si osservano nelle leishmaniosi naturale o sperimentale.

Una tale difficoltà di infezione naturale e sperimentale delle pulci con virus di *leishmania* risiede certamente nella grande rarità con cui si rinvencono i parassiti nel sangue circolante e dei quali taluni forse non sono neppure adatti all'ulteriore sviluppo; più particolarmente nelle ricerche del Pereira, condotte con attenzione, noi ci sentiamo autorizzati a ritenere che nessuna delle pulci in esperimento ingerì mai *leishmania*, perchè questi protozoi come ci assicura l'Autore, mai sono apparsi all'esame il più minuzioso di tutte le deiezioni raccolte, sia durante il pasto, sia negli intervalli; evidentemente se le *leishmania* non erano state ingerite, non potevano svilupparsi!!!

Io non mi sarei fermato su tali ricerche del Pereira se questo autore non avesse tentato una generalizzazione delle idee del Brumpt sulla *xenodiagnostica*, e non avesse ricordato le ricerche del Wenyon e del Patton sull'infezione sperimentale delle pulci con virus di *leishmania tropica* e *leishmania donovani* per giungere ad affermare, inaspettatamente, che le sue ricerche fin oggi dimostrano che « le pulci (del cane e dell'uomo) non sono gli agenti di trasmissione della leishmaniosi umana e canina ».

Tale affermazione del Pereira è in evidente contrasto non solo colle sue stesse ricerche che, come egli scrive in precedenza nella sua stessa Nota « non possono dimostrare in modo assoluto che le pulci non si infettano », ma è anche in contrasto con le altre sue simili ricerche da lui precedentemente pubblicate e nelle quali ha ottenuto reperto positivo di infezione sperimentale delle pulci (del cane) ponendole a succhiare su un cane sperimentalmente infetto di leishmaniosi di origine infantile; ricerche queste che

sono state già da me esaminate in una mia precedente pubblicazione (Rendic. Accad. Lincei, 1914) e che per brevità di spazio io qui non ripeto.

Rispetto alla *xenodiagnostica* proposta dal Brumpt per la diagnosi della tiroidite parassitaria (quando gli altri mezzi diagnostici non sono applicabili o sono negativi) io osservo al Pereira che lo stesso Brumpt, che riferisce di aver ottenuto il 100 % di successi sperimentando con *Triatoma* o *Rhodnius* e soggetti infetti di tiroidite parassitaria scrive a tal proposito « questa percentuale distingue questi meravigliosi ospiti trasmissori dalle *Glossine* che nella malattia del sonno ed in altre tripanosomiasi animali si infettano in una proporzione minima ».

È stato infatti osservato che molti protozoi patogeni ingeriti dai loro ospiti trasmissori naturali non compiono in essi l'ulteriore sviluppo, ma invece degenerano e scompaiono; le cause di questi fenomeni non sono fino oggi note.

Il Grassi, studiando lo sviluppo dei parassiti malarici nell'intestino dell'*Anopheles*, ha potuto osservare in taluni *Anopheles* la degenerazione e la scomparsa dei parassiti malarici; egli ha interpretato questo fenomeno con un fenomeno di immunità congenita che presentano taluni *Anopheles* e ne ha dato la dimostrazione sperimentando con *Anopheles* allevati in laboratorio.

Il Minchin e Thomson studiando recentemente il ciclo evolutivo del *Tripanosoma Lewis* nella pulce del topo (*Ceratophyllus fasciatus*) hanno potuto accertare che nelle numerosissime pulci poste a succhiare su topi intensamente infetti di *Trip. lewisi* soltanto in alcune di esse si è compiuto l'ulteriore sviluppo del tripanosoma nel tubo digerente: in una percentuale approssimativa del 25%; nelle altre pulci il parassita ingerito è ben tosto degenerato e scomparso.

Nella malaria e nelle tripanosomiasi i parassiti sono talora frequentissimi nel sangue periferico; mentre nella leishmaniosi interna nelle regioni mediterranee è ormai definitivamente accertata la loro costante rarità.

Al lume quindi delle suddette osservazioni sulla frequenza o meno dei protozoi patogeni nel sangue periferico, sulla loro capacità o no all'ulteriore sviluppo e sulla recettività o refrattarietà dei loro ospiti trasmissori naturali si può oggi dedurre che nessun valore scientifico hanno gli esperimenti del Pereira, e che è per lo meno prematura la conclusione che il Wenyon ed il Patton hanno voluto trarre dalle loro ricerche di infezione sperimentale delle pulci con virus di *leishmania tropica* e *leishmania donovani*.

Matematica. — *Alcune questioni di geometria sopra una curva algebrica.* Nota I di RUGGIERO TORELLI, presentata dal Socio E. BERTINI.

In questo lavoro, dopo avere brevemente ricordata la rappresentazione analitica di una corrispondenza algebrica fra due curve (§ 1), scrivo certe relazioni cui soddisfano i periodi normali degli integrali normali di prima specie relativi a due curve $C_p \bar{C}_p$ di genere p , allorquando esse sono birazionale identiche (teorema I); e mostro poi come parte di queste relazioni siano sufficienti per dedurre l'identità birazionale di $C_p \bar{C}_p$ (teorema II). Ciò getta qualche luce sulle incognite relazioni di Riemann che legano i periodi normali relativi a una curva.

Enuncio poi una condizione necessaria e sufficiente, relativa sempre ai periodi di $C_p \bar{C}_p$, perchè queste due curve abbiano la stessa varietà di Jacobi (teorema III); e ciò mi dà occasione di ritrovare un teorema del Severi in proposito.

Per esporre gli altri risultati, prometto qualche spiegazione.

A) Siano V_p, \bar{V}_p le varietà delle q -ple di punti di due curve $C_p \bar{C}_p$ ($q \leq p$). Dicendo ciò, intendiamo che siano state fissate le corrispondenze fra i punti di $V_p \bar{V}_p$ e le q -ple di punti di $C_p \bar{C}_p$; e che, se C_p è sovrapposta a \bar{C}_p , sia V_p sovrapposta a \bar{V}_p , e le due dette corrispondenze coincidano.

Se fra $C_p \bar{C}_p$ intercede una corrispondenza biunivoca, questa fa corrispondere biunivocamente le q -ple di punti di C_p a quelle di \bar{C}_p , inducendo così una ben determinata corrispondenza biunivoca fra $V_p \bar{V}_p$. Quest'ultima, e quelle da essa dedotte moltiplicandola per trasformazioni *ordinarie* ⁽¹⁾ in sè di $V_p \bar{V}_p$, si diranno *associate* alla data corrispondenza biunivoca fra le due curve.

B) Consideriamo nella varietà di Jacobi V_p , relativa a una curva C_p , la varietà ∞^q immagine delle p -ple di punti di C_p con $p - q$ punti fissi arbitrari. Applicando a tal varietà tutte le trasformazioni ordinarie di V_p in sè, si hanno ∞^p varietà che chiameremo brevemente *varietà* W_p . Le W_p

⁽¹⁾ Una corrispondenza biunivoca fra le q -ple di punti di una curva C_p di genere $p \geq q$ si dice *ordinaria di 1^a o 2^a specie*, quando la differenza o la somma di q -ple omologhe varia in una serie lineare. Se $q = p - 1$, ovvero se C_p è iperellittica, esiste una corr. ordinaria (che è di 2^a specie); se $q < p - 1$ e C_p non è iperellittica, non esistono corr. ordinarie.

Una corr. non ordinaria dicesi *singolare*.

costituiscono un sistema ∞^p se $q = p - 1$, ovvero se C_p è iperellittica; due sistemi ∞^p negli altri casi.

C) Entro una varietà V_k chiameremo *carattere d'immersione* di una V_{k-1} il numero dei punti comuni ad essa e a $k - 1$ varietà canoniche. Il carattere d'immersione delle V_{k-1} di un sistema continuo si calcola facilmente mediante gli *invarianti* Ω_0 (grado del sistema canonico) delle V_{k-1} stesse e delle varietà comuni a 2, a 3, ..., a k delle V_{k-1} (per un gruppo di n punti si assume $\Omega_0 = n$; per una curva di genere p si assume $\Omega_0 = 2p - 2$) ⁽¹⁾.

Ciò posto, nel § 5 io dimostro il seguente

TEOREMA IV. — *Nella varietà jacobiana V_p di una curva C_p si abbia una varietà V_p bir. identica alla varietà delle q -ple di punti di un'altra curva \bar{C}_p , e tale che nessun integrale di 1^a specie di V_p resti costante su di essa. Se le W_{p-1} di V_p segano su tal V_p varietà aventi il carattere di immersione*

$$p \sum_{k=0}^{p-2} (2p - q - 2 - k) \binom{q-2}{k} (p - q - 1)^{p-2-k} \times \\ \times (p - 1)(p - 2) \dots (p - k),$$

allora le curve $C_p \bar{C}_p$ sono bir. identiche, e la V_p è una varietà W_p .

Da questo teorema seguono subito gli altri due:

TEOREMA V. — *Se fra le varietà di Jacobi $\bar{V}_p V_p$ di due curve $\bar{C}_p C_p$ intercede una corrispondenza biunivoca che muti una W_p di \bar{V}_p in una W_p di V_p , tal corrispondenza è associata a una corrispondenza biunivoca fra $\bar{C}_p C_p$ ⁽²⁾.*

TEOREMA VI. — *Se fra le varietà delle q -ple di punti di due curve $C_p \bar{C}_p$ ($q < p$) intercede una corrispondenza biunivoca, questa è associata a una corrispondenza biunivoca fra $C_p \bar{C}_p$.*

⁽¹⁾ Chiamando $\Omega_0^{(1)} \Omega_0^{(2)} \dots \Omega_0^{(k)}$ i detti invarianti Ω_0 (talchè $\Omega_0^{(k)}$ è il grado delle V_{k-1}), si ha per es.:

$$\text{per } k = 2: \text{ car. immers.} = \Omega_0^{(1)} - \Omega_0^{(2)};$$

$$\text{per } k = 3: \text{ car. immers.} = \Omega_0^{(1)} - 2\Omega_0^{(2)} + 3\Omega_0^{(3)};$$

e si calcola subito, per induzione, la formula generale.

⁽²⁾ Nel caso $q = p - 1$, questo teorema è stato recentemente dimostrato dal Comesatti [Atti Accad. Torino, vol. 50, 1914-15]; e allora può anche (come lo stesso Comesatti avverte) dedursi immediatamente dal mio teorema ricordato al principio del n. 7. Basta osservare che alla curva di \bar{V}_p , immagine delle p -ple di punti di \bar{C}_p con $p - 1$ punti fissi arbitrari, la corrispondenza di cui parla l'enunciato del teorema V (postovi $q = p - 1$) fa corrispondere una curva di V_p che incontra in p punti le W_{p-1} ; e applicare il mio ricordato teorema.

Quest'ultimo è poi essenziale anche per la dimostrazione del teorema V.

Da questi due teoremi, supponendo che le curve $C_p \bar{C}_p$ siano sovrapposte, segue che

Se la varietà jacobiana di una curva C_p possiede una trasformazione singolare che muti in sé la totalità delle W_p , tal trasformazione è associata a una trasformazione birazionale singolare ⁽¹⁾ di C_p in sé.

Se la varietà delle g -ple di punti di una curva C_p possiede una trasformazione singolare in sé, questa è associata a una trasformazione birazionale singolare in sé di C_p .

§ 1. — RAPPRESENTAZIONE ANALITICA

DI UNA CORRISPONDENZA ALGEBRICA FRA DUE CURVE.

1. Sia C_p una curva di genere p ; y un suo punto variabile. Possiamo rappresentare i punti y mediante i punti di una ciambella con p buchi R : siano $A_i B_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$) le p retrosezioni su R ; $v_i(y)$ i p integrali normali di 1^a specie; τ_{ik} il periodo di $v_i(y)$ lungo B_k ($\tau_{ik} = \tau_{ki}$). Osserviamo subito che, data C_p , la corrispondenza fra i suoi punti e quelli di R non è determinata in modo unico; nè, per conseguenza, sono determinati univocamente gli $\frac{1}{2}p(p+1)$ numeri τ_{ik} . Il sistema dei τ_{ik} si dirà brevemente un *sistema di periodi normali di C_p* .

Sia poi \bar{C}_p un'altra curva di genere p ; x un suo punto variabile; $\bar{R}, \bar{A}_i \bar{B}_i, u_i(x), a_{ik}$ enti analoghi ai precedenti, e relativi a \bar{C}_p .

Supponiamo che tra $C_p \bar{C}_p$ interceda una corrispondenza $(n \nu)$ che, pensata come operazione che porta da un punto di \bar{C}_p a n punti di C_p , chiameremo S ; sia $y' y'' \dots y^n$ il gruppo degli omologhi del punto x di \bar{C}_p . Allora si hanno le classiche p relazioni di Hurwitz

$$(1) \quad v_k(y') + \dots + v_k(y^n) = \sum_i \pi_{ki} u_i(x) + \pi_k \quad (k = 1, 2, \dots, p) \quad (2),$$

dove le π_k sono costanti e le π_{ki} verificano le eguaglianze

$$(2) \quad \begin{cases} \pi_{ki} = h_{ki} + \sum_j g_{ij} \tau_{kj} \\ \sum_i \pi_{ki} a_{il} = H_{kl} + \sum_i G_{il} \tau_{ki}, \end{cases}$$

gli h, g, H, G essendo numeri interi (*intieri caratteristici* di S).

⁽¹⁾ Le sole corrispondenze biunivoche non singolari, su curve di genere $p > 1$, sono quelle date dalle g_2^1 delle curve iperellittiche.

⁽²⁾ In tutte le formule, quando non sia esplicitamente notato il contrario, gli indici di sommazione variano da 1 a p .

Da queste si traggono le p^2 relazioni

$$(2') \quad \sum_{j,i} g_{ji} \tau_{kj} a_{ii} + \sum_i h_{ki} a_{ii} - \sum_i G_{ii} \tau_{ki} - H_{ki} = 0.$$

Se la corrispondenza S non è a valenza zero, i numeri τ_{ki} non sono tutti nulli; e viceversa. E si noti che, com'è facile vedere, i numeri τ_{ki} sono tutti nulli se, e solo se, lo sono i numeri $h_{gi} H_{gi}$.

2. Per l'operazione S^{-1} (inversa della S), che porta da un punto y di C_p ai suoi omologhi $x' x'' \dots x^n$, avremo similmente

$$u_k(x') + \dots + u_k(x^n) = \sum_i \bar{\pi}_{ki} v_i(y) + \bar{\pi}_k,$$

e

$$\bar{\pi}_{ki} = \bar{h}_{ki} + \sum_i \bar{g}_{ii} a_{ki}$$

$$\sum \bar{\pi}_{ki} \tau_{ii} = \bar{H}_{ki} + \sum_i \bar{G}_{ii} a_{ki}.$$

Ora, i numeri $\bar{h} \bar{g} \bar{H} \bar{G}$ si determinano facilmente, imitando il procedimento che segue l'Hurwitz nel caso che le curve $C_p \bar{C}_p$ siano sovrapposte e si rappresentino *allo stesso modo* su un'unica ciambella (talchè $\tau_{ik} = a_{ik}$). Si trova così

$$\bar{h}_{ki} = G_{ik}, \quad \bar{g}_{ki} = -g_{ik}, \quad \bar{H}_{ki} = -H_{ik}, \quad \bar{G}_{ki} = h_{ik}.$$

3. Vediamo adesso facilmente che

Se $p > 1$ e il determinante Π dei numeri π_{ki} è diverso da zero, non possono esistere su \bar{C}_p , nè su C_p , infinite coppie di punti i cui gruppi omologhi siano equivalenti o coincidano.

Infatti, se ogni gruppo $(y' y'' \dots y^n)$ fosse equivalente a qualche altro gruppo analogo, i p integrali di \bar{C}_p

$$\sum_i \pi_{ki} u_i(x)$$

non potrebbero essere linearmente indipendenti ⁽¹⁾; quindi seguirebbe $\Pi = 0$, contro il supposto. Se poi si verificasse qualcun altro dei casi che vogliamo dimostrare assurdi, la serie descritta su C_p dal gruppo $(y' y'' \dots y^n)$ dovrebbe godere di una delle due proprietà: 1^a) essere birazionale identica a una involuzione di \bar{C}_p (loc. cit., n. 1); 2^a) essere nella stessa classe ⁽²⁾ con

(1) R. Torelli, *Sulle serie algebriche* ecc. [Rend. Palermo, tomo XXXVII (1914)], n. 16, III.

(2) Si dice che due serie (di egual dimensione) appartengono alla stessa *classe*, quando esse possono mettersi fra loro in corrispondenza biunivoca tale che la somma o la differenza di due gruppi omologhi varii in una serie lineare.

una serie composta con una involuzione (loc. cit., n. 21, teorema IV). Ma allora si arriverebbe daccapo alla deduzione che gli integrali sopra scritti non sono linearmente indipendenti.

Dalla precedente proposizione segue subito che

Se $p > 1$ e $\Pi \neq 0$, le serie γ_n^1, γ_v^1 degli ordini n, v , indotte dalla corrispondenza S su C_p, \bar{C}_p , hanno gli indici rispettivi v, n , e sono birazionali identiche rispettivamente a \bar{C}_p, C_p .

Si potrebbe anche facilmente vedere che

Se $\Pi \neq 0$, è anche diverso da zero il determinante degli interi caratteristici (scritto al n. 9).

4. Supponiamo $p > 1$ e $\Pi \neq 0$. Chiamando omologhi su C_p due punti quando sono in uno stesso gruppo della serie γ_n^1 , si ottiene su C_p una corrispondenza simmetrica T , di indice $v(n-1)$. In modo analogo si ottiene su \bar{C}_p una corrispondenza simmetrica \bar{T} , di indici $n(v-1)$.

Si ottengono facilmente le rappresentazioni analitiche delle corrispondenze T, \bar{T} .

Basta osservare che, per es., la T non è altro che il prodotto $S^{-1}S$, diminuito dell'identità contata v volte. Con che, detti $y' y'' \dots$ gli omologhi di y nella T , si hanno le formule

$$v_k(y') + v_k(y'') + \dots = -v v_k(y) + \sum_i \pi_{ki}^* v_i(y) + \pi_k^*$$

$$\pi_{kl}^* = h_{kl}^* + \sum_i g_{il}^* \tau_{ki}$$

$$\sum_i \pi_{ki}^* \tau_{il} = H_{kl}^* + \sum_i G_{il}^* \tau_{ki} \quad (1)$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} h_{kl}^* = G_{lk}^* = \sum_i (h_{ki} G_{li} - H_{ki} g_{li}) \\ g_{kl}^* = -g_{lk}^* = \sum_i (g_{ki} G_{li} - G_{ki} g_{li}) \\ H_{kl}^* = -H_{lk}^* = \sum_i (H_{ki} h_{li} - h_{ki} H_{li}) \end{array} \right.$$

Analogamente si potrebbero scrivere le formule relative a \bar{T} .

È anche facile di calcolare il comune difetto di equivalenza z delle due serie γ_n^1, γ_v^1 .

(1) Le espressioni delle costanti π_{ki}^* non hanno per noi alcun interesse.

Avverto che le considerazioni di questo numero subiscono qualche lievissima modificazione, quando si tolga l'ipotesi $p > 1, \Pi \neq 0$.

Basta osservare che il numero dei punti doppi di γ_n^1 , ossia dei punti uniti di $T^{(1)}$, è dato notoriamente da

$$2\nu(n+p-1) - 2s;$$

e anche, per una importante formula di Hurwitz, da

$$2\nu(n-1) - 2\left(\sum_k h_{kk}^* - \nu p\right).$$

Dal paragone delle due espressioni segue

$$(4) \quad s = \sum_k h_{kk}^* = \sum_{ki} (h_{ki} G_{ki} - H_{ki} g_{ki}).$$

5. Le considerazioni del n. 1 si invertono così: Se due sistemi di periodi normali $\pi_{ik} a_{ik}$ delle due curve $C_p \bar{C}_p$ soddisfano alle relazioni (2'), esistono fra $C_p \bar{C}_p$ infinite corrispondenze, cui competono gli interi caratteristici $h g H G$ ovvero $-h -g -H -G$.

Tutte queste corrispondenze formano, come diremo, una *classe*, nel senso che le serie da esse indotte su C_p e su \bar{C}_p formano una classe.

In una classe di corrispondenze (che non sia quella delle corrispondenze a valenza zero) esistono infinite corrispondenze aventi uno degli indici eguale a p . Basta osservare che, supposte verificate le (2), il sistema di equazioni *abeliane*

$$\bar{v}_k(y') + \dots + v_k(y^p) = \sum_i \pi_{ki} u_i(x) + \pi_k,$$

colle costanti π_k genericamente scelte, individua, per ogni punto x di \bar{C}_p un gruppo $(y' \dots y^p)$ di p punti su C_p . In tal senso diremo che il precedente sistema rappresenta una γ'_p di C_p .

Notiamo che le cose dette in questo § 1, eccettuato naturalmente il n. 3, si estendono subito al caso di due curve di generi *diversi*.

§ 2. — CONDIZIONI PER L'IDENTITÀ BIRAZIONALE DI DUE CURVE.

6. Dalle considerazioni del § 1 deduciamo facilmente le condizioni necessarie cui debbono soddisfare le $\pi_{ik} a_{ik}$ perchè le due curve $C_p \bar{C}_p$ siano birazionalmente identiche. Basta pensare che, se fra $C_p \bar{C}_p$ intercede una corrispondenza biunivoca S , il prodotto $S^{-1}S$, la cui rappresentazione analitica si deduce subito da quella di S (n. 4), è l'identità. Tenendo dunque presenti le formule (2') (3), abbiamo il

(¹) Se tali punti fossero infiniti, si ricorrerebbe a un'altra corrispondenza S' , avente gli stessi interi caratteristici di S (cfr. n. 5), e non presentante questa particolarità.

TEOREMA I. — Se due curve $C_p \bar{C}_p$ sono birazionalmente identiche, fra due loro qualunque sistemi di periodi normali $\tau_{ik} a_{ik}$ intercedono certe p^2 relazioni

$$\sum_{j,i} g_{ji} \tau_{kj} a_{ii} + \sum_i h_{ki} a_{ii} - \sum_i G_{ii} \tau_{ki} - H_{ki} = 0,$$

dove gli intieri $hgHG$ (dipendenti dalla scelta dei $\tau_{ik} a_{ik}$) soddisfano alle $p(2p-1)$ eguaglianze

$$\left. \begin{aligned} \sum_i (h_{ki} G_{ki} - H_{ki} g_{ki}) &= 1 \\ \sum_i (h_{ki} G_{ii} - H_{ki} g_{ii}) &= 0 \\ \sum_i (g_{ki} G_{ii} - G_{ki} g_{ii}) &= 0 \\ \sum_i (H_{ki} h_{ii} - h_{ki} H_{ii}) &= 0 \end{aligned} \right\} k \neq i,$$

e alla condizione che il determinante dei numeri $\pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{ii} \tau_{ki}$ è diverso da zero.

7. Le condizioni sufficienti per l'identità birazionale delle curve $C_p \bar{C}_p$ si deducono dal § 1 e da un teorema da me dimostrato tempo fa ⁽¹⁾: teorema il quale afferma, in sostanza, che se per la corrispondenza S , di cui si è parlato nel § 1, si verificano le due circostanze che il determinante dei numeri π_{kl} è diverso da zero, e il difetto d'equivalenza z delle serie $\gamma_n^1 \gamma_n^1$ ha il valore p , allora nella classe individuata da S vi è una corrispondenza biunivoca. Otteniamo così il

TEOREMA II. — Per affermare che due curve $C_p \bar{C}_p$ sono birazionali identiche, basta sapere che esse posseggono due sistemi di periodi normali $\tau_{ik} a_{ik}$ verificanti le p^2 relazioni

$$\sum_{j,i} g_{ji} \tau_{kj} a_{ii} + \sum_i h_{ki} a_{ii} - \sum_i G_{ii} \tau_{ki} - H_{ki} = 0,$$

dove gli intieri $hgHG$ soddisfano alla condizione

$$\sum_{ik} (h_{ki} G_{ki} - H_{ki} g_{ki}) = p,$$

e all'altra che il determinante formato coi numeri $\pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{ii} \tau_{ki}$ sia diverso da zero.

(¹) R. Torelli, *Sulle varietà di Jacobi* [questi Rend., vol. XXII, agosto 1913], teorema I.

8. Dal paragone dei teoremi I e II viene il seguente

COROLLARIO. — *Supposto che i numeri $\tau_{ik} a_{ik}$ siano due sistemi di periodi normali di due curve $C_p \bar{C}_p$, il sistema delle $p^2 + 1$ equazioni nelle $hg HG$:*

$$(5) \quad \sum_{ji} \tau_{kj} a_{ij} g_{ji} + \sum_i a_{ii} h_{ki} - \sum_i \tau_{ki} G_{ii} - H_{ki} = 0$$

$$(6) \quad \sum_{ki} (h_{ki} G_{ki} - H_{ki} g_{ki}) = p,$$

gode della seguente proprietà: se esso ammette una soluzione intera che non annulli il determinante II dei numeri $\pi_{ki} = h_{ki} + \sum_i g_{ii} \tau_{ki}$, questa soluzione necessariamente soddisfa alle $p(2p - 1)$ relazioni

$$\sum_i (h_{ki} G_{ki} - H_{ki} g_{ki}) = 1$$

[si noti che da queste segue la (6)]

$$\left. \begin{aligned} \sum_i (h_{ki} G_{ii} - H_{ki} g_{ii}) &= 0 \\ \sum_i (g_{ki} G_{ii} - G_{ki} g_{ii}) &= 0 \\ \sum_i (H_{ki} h_{ii} - h_{ki} H_{ii}) &= 0 \end{aligned} \right\} k \neq l.$$

Orbene: questa proprietà del sistema (5) (6) implica delle relazioni fra i coefficienti $\tau_{ik} a_{ik}$: essa è cioè equivalente alle relazioni riemanniane, ricordate in prefazione, fra le τ_{ik} e fra le a_{ik} (o a parte di esse).

Per giustificare questa affermazione osserviamo, che, scelti degli intieri $hg HG$ colla sola condizione che soddisfino alla (6), si può sempre risolvere, in ∞^p modi almeno, il sistema (5) rispetto alle $p(p + 1)$ incognite $\tau_{ik} a_{ik}$ (convenendo che debba essere $\tau_{ik} = \tau_{ki}$, $a_{ik} = a_{ki}$). E la generica di queste soluzioni non annulla certo il determinante II; perchè ciò non avviene particolarizzando ancor più gli intieri $hg HG$: basta, per convincersene, prendere due curve $C_p \bar{C}_p$ birazionalmente identiche, e scrivere le relazioni di cui parla il teorema I.

E. M.